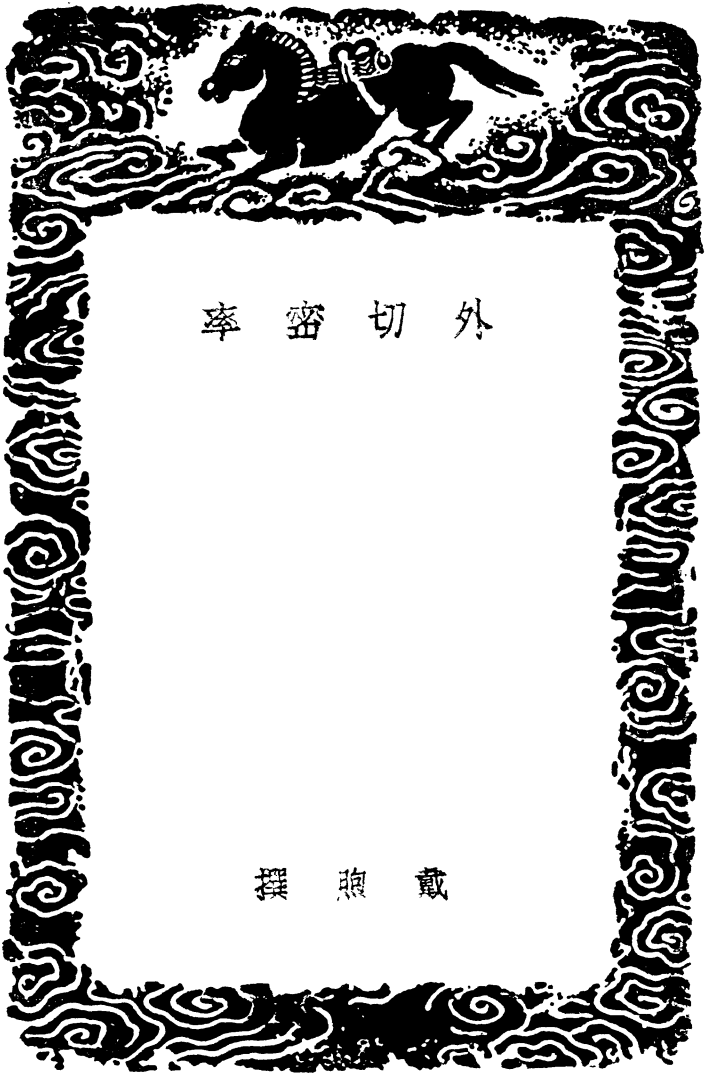
外切密率

叢書集成

初編

主編者
王雲五

商務印書館發行



外切密率

戴煦撰

本館據粵雅堂叢書本影印初編各叢書僅有此本

外切密率

方圓率不相通通之以極細分通弦杜氏粗爲簡術方立董氏申其意吾師梅侶項先生滙其全秋紙李君又著弧矢啟祕而術乃大備杜術先以本數比例後以用數入之李術先定率數乘除後以本數入之究其指歸實出一理所惜吾杜氏有弦矢術無切割術李氏有其術而分母分子之源未經解釋欲依杜氏例繹之罕有得其通吾顧弦矢與切割本可互爲比例弦矢二綫之實數本弦矢率率數而生是弦矢率可當弦矢綫也綫可比例率豈不可比例惟用率內諸率各自爲率必須累次乘除且必令切割率分母同於弦矢率分母乃驗所得分子爲切割率分子每得一分子卽爲一次乘法乘法可變而除法不可變於是以比例所得之率數乘除法乘除弧背其求得之數必仍爲比例所得之切割矣父執戴鄂士先生本此意以立術可謂鉤奩凝思無幽不燭尤妙者爲餘弧求切割二術蓋弦矢綫聯于圓中任極大不能至弧背三之二切割線出于圓外若將近九十度切割之大殆有無量數求至數十數後諸數之差甚微萬不能降至單位以此二術湊其窮則三率餘弧之小可至纖微除二率半徑得一率爲第一數亦可大至無量數而難者反易矣析理之精固如是乎昔吾師嘗以弧分不通切割爲憾若見此術解必且狂喜鼓舞不能已已惜哲人云萎先生之孤詣苦心不及欣賞展讀是編不禁師門之痛也丙辰初冬愚姪夏鸞翔拜題

新法推步必資八線求八線必資六宗三要二簡法而布算綦繁且無徑求之術自泰西杜氏德美以連比例九術入中國而割圓之法始簡顧其術但能求弦矢而不能求切割二線鈞卿徐氏有切線弧背互求二術而于割線尚未全也間嘗與梅侶項先生議及欲補全之深思累年始悟連比例率既可互相乘除自可互相比例則借求弦矢諸術變通之而求切割二線諸術靡不在是矣因推衍數術以呈先生而先生以未有術解爲嫌于是更爲術解以取徑迂回深慮言難達意又復累年始竟錄未及半而先生遽歸道山無可印證用是嗒焉神喪輒棄置不復道至去歲獲交海昌壬叔李君以所著對數探源弧矢啟祕見示其對數探源與予對數簡法後一術殊途同歸而弧矢啟祕則用尖堆立算別開生面兼有割線諸術特未及餘弧耳緣出予未竟殘稾請正而壬叔頗賞予餘弧與切割二線互求之術再四促成今歲又寄札詢及遂謝絕煩冗扃戶鈔錄閱月乃竟嗟乎及朋之助曷可少哉記曩演四元玉鑑細草十餘載或作或輟迄未成書得吉勇王君屢次迫促始克告竣茲非壬叔之勸成則以予之懶散必至廢擱以終其身雖立術猥瑣不足道而一時精神所寄亦可惜也特他日止能質之壬叔而無復能質之梅侶先生不無遺憾耳咸豐壬子中秋錢唐戴煦鄂士識于友某書屋

外切密率

例言

一茲編推纂杜氏九術而補其未備以啟後之緩容于圓內切割二綫出于圓外故名曰外切密率至杜氏術解則已闕發于明壽庵氏董方立氏不復重贅

一算理最爲深晦解釋頗難暢暢　國祺定九模氏蒼迹各種每拈一義挾一自靡不委曲詳盡務令閱者豁然極可奉爲準則竊嘗慕效之故縷晰條分衍說重複亦欲窮其義蘊而後已不以辭費爲嫌也

一割圓用連比例率本屬無窮無盡茲但截演數率以明遞推之例蓋推得數率而知此數率中之正負若何以及分母之遞加若何分子之乘除若何皆有一定之例而不可紊既得一定之例則舉而推之千百率而此千百率之正負母子莫不可見矣故術中或推至十率或十一率非謂連比例盡于此也特截演以起例耳

一凡連比例各率相乘其率數可變通假如有相連比例自一率至五率其二率自乘一率除之得三率故二率乘二率亦可云一率乘三率或云三率乘一率其二三率相乘一率除之得四率故二率乘三率亦可云一率乘四率其三率自乘一率除之得五率或二率除之得四率故三率乘三率亦可云一率兼五率或云二率乘四率茲于各率相乘之後視除法之首位起幾率即命爲幾率所乘如除法首位起一率則本二率乘二率者命爲一率乘三率本二率乘四率者命爲一率乘五率餘可類推所以便除也

一割圓用連比例率均屬零分其分母漸加漸多似可幷爲一母而實不可幷如云二分又三分之一幷之可云六分之一以二三相乘得六也如云二分又三分又四分又五分之一幷之亦可云一百二十分之一以二三四五疊乘得一百二十也然幷之則挨次遞求之例反隱而不顯矣故不得云六分之一而必曰二三分之一不得云一百二十分之一而必曰二三四五分之一

一割圓各率之分母分子大者似可約之而小而實不可約如云二分又三分之二約之可云三分之一然遞求之分母必挨次遞加方可推至多率此率可約彼率不可約則分母紊亂而無能自數率而推至千百率矣故不得云三分之一而必曰二三分之二

一凡求分子之乘除似有可省者而實不可省如

云一乘或云兩次一乘或既用三除復用三乘用四乘復用四除似均可省矣然遞求非此不明若悉從省則挨次之例反晦矣故入算時可省而立術時不可省

一凡各率既屬零分則分母分子最易雜糅茲于分母用一二三四五等字於分子用天元算式庶母子截然而不混矣天元算式者其自一至九則作一丨川川丌丅丌丌凡自百而萬而百萬皆同此式其自一十至九十則作一丨川川丌丅丌丌凡自千而十萬而千萬並同此式若係負算于式之末位加

一凡言算者或但明其術而不及于數故有其術而不適於用者有之茲每立一術必附算式于後非敢謂必適于用也特欲藉以驗其數之合與否而已

一凡附算式必取其極繁重者如弧背求切線其三十度以內用本弧求切線術則求三十度之切線爲最繁重其三十度以外用餘弧求切線術亦求三十度之切線爲最繁重故算式俱係求三十度切線其弧背求割線以及切割二線求弧背諸術並同此例

一借線求弧凡諸線皆可借茲于切線惟借距弧切線于割線惟借半弧切線三率及倍弧割線者以此數線均可比例而得若借他線或須開方布算較煩故置不用且借此數線已足數求弧之用矣

卷之一
本弧求切線術解
餘弧求切線術解
弧背求切線算式
卷之二
本弧求割線術解
餘弧求割線術解
弧背求割線算式
卷之三
切線求本弧術解
切線求餘弧術解
切線求距弧術解
切線求弧背算式
卷之四
割線求本弧術解
割線求餘弧術解
割線求半弧術解
割線求倍弧術解
割線求弧背算式

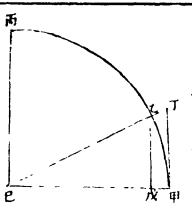
外切密率卷之一

本弧求切線

術曰先求各率分子爲遞次乘法　以二爲數根即爲第一乘法　置前數根加二得四爲數根置前乘法四五遞乘之一二遞除之得二十爲初減數數根減初減得十六爲第二乘法　置前數根加二得六爲數根置前初減六七遞乘之三四遞除之得七十爲初減數置前乘法六七遞乘之一二遞除之得三百三十六爲次減數數根減初減得六十四再減次減得二百七十二爲第三乘法　置前數根加二得八爲數根置前初減八九遞乘之五六遞除之得一百六十八爲初減數置前次減八九遞乘之三四遞除之得二千〇十六爲次減數置前乘法八九遞乘之一二遞除之得九千七百九十二爲三減數數根減初減得一百六十再減次減得一千八百五十六再減三減得七千九百三十六爲第四乘法　凡數根均起各耦數其求各減數則用耦奇二數乘而逐次乘法遞加（如第二乘法用四五再用奇耦二數除而挨次減數遞降（如第三乘法初減用三四除次減一二除）乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

乃以本弧弧分爲第一數　次以半徑爲連比例一率弧分爲二率二率自乘一率除之得三率置第一數以三率乘之一率除之得四率二三遞除之爲六率用數以第一乘法乘之爲第一數　次置六率用數以三率乘之一率除之得六率四五遞除之爲八率用數以第二乘法乘之爲第二數　次置八率用數以三率乘之一率除之得八率六七遞除之爲十率用數以第三乘法乘之爲第四數　次置十率用數以三率乘之一率除之得十率八九遞除之爲十二率用數以第四乘法乘之爲第五數　如是遞求至單位下以諸數相并得切線

解曰凡以餘弦爲小股正弦爲小句半徑爲大股則正切線爲其大句故以一率半徑乘弧背求正弦各率分數以弧背求餘弦各率分數除之即得弧背求切線各率分數



如圖甲乙爲本弧甲丙爲象限乙丙爲餘弧丁甲爲所求本弧切線乙戊爲正弦已戊爲餘弦已甲類爲半徑以已戊小股比乙戊小句若已甲大股與丁甲大句

一率　小股　弧背求餘弦各率分數
二率　小句　弧背求正弦各率分數
三率　大股　一率半徑

四率　大句　本弧求切線各率分數

依泰西杜氏演得弧背求正弦各率分數爲二率

一少四率一分又二分又三分之一（又三分又二分之一分）

即六分之一蓋一二三疊乘即六也茲求切線率分其分母不可合并故不曰六分之一而曰一分又三分之一多六率一分又二分又三分又四分又五分之一即一百二十分之一也少八率一分又二分又三分又四分又五分又六分又七分之一即五千〇四多十率一分又二分又三分又四分又五分又六分又七分又八分又九分之一

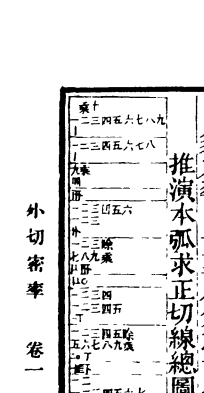
即三十六萬二千八百八十分之一原求各線率分數本無盡弦截五位以見例演得弧背求正矢各率分數爲三率一二分之一（即一分又二分之一）

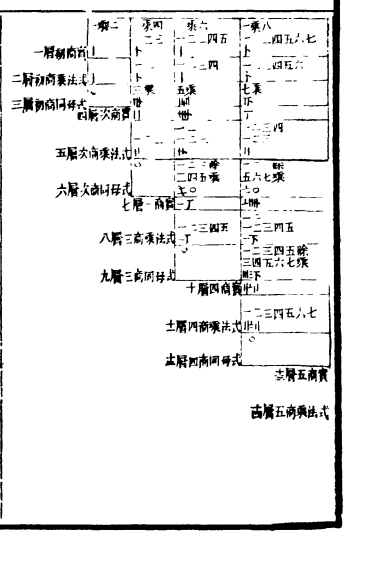
之一茲從省文茲少五率一一三四分之一（即一分又二分又四分之一）

從省文茲多七率自一至六分之一即一分又二分又四分之一又五分又六分之一茲從省文以下均倣此少九率自一至八分之一

以弧背求正矢各率分數減一率半徑得弧背求餘弦各率分數爲一率一少三率一二分之一多五率一二三四分之一少七率自一至六分之一多九率自一至八分之一也

推演本弧求正切線總圖



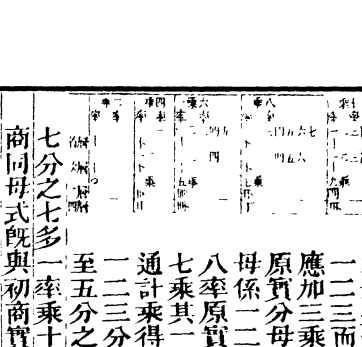


如圖先置弧背求正弦各率分數以一率半徑乘之所得如首層爲一率乘二率一少一率乘四率一二三分之一多一率乘六率自一至五分之一少一率乘八率自一至七分之一多一率乘十率自一至九分之一爲乘得數便爲初商實乃以餘弦各率分數除之置初商實首位一率乘二率一以除法首位一率一約之得二率一即爲初商乃以二率一乘除法所得如二層一率乘二率一少一率乘四率一二分之一（本層二率乘三率而二率相乘即本層二率乘一率相乘）多一率乘六率一二三四分之一（本層二率乘一率即一率）

乘六率以下同此例少一率乘八率自一至六分之一多一率乘十率自一至八分之一爲初商乘法式應減

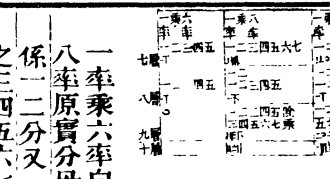
初商實其首位一率乘二率一相減
却盡其一率乘四率則原實分母係
一二三而初商乘法式分母係一二
應加三乘以同其母其一率乘六率
原實分母係一二三四五乘法式分
母係一二三四應加五乘其一率乘
八率原實分母與乘法式相較應加
七乘其一率乘十率相較應加九乘
通計乘得如第三層少一率乘四率
一二三分之三多一率乘六率自一
至五分之五少一率乘八率自一至
七分之七多一率乘十率自一至九分之九為初
商同母式既與初商實同母乃可相減矣其減餘
數如第四層為一率乘四率一二三分之二少一
率乘六率自一至五分之四多一率乘八率自一
至七分之六少一率乘十率自一至九分之八為
次商實（分母同初商實故不重列但列分子）

置次商實首位一率乘四率一二三分之二以除
法首位一率約之得四率一二三分之二即為
次商以乘除法所得如第五層一率乘四率一二
三分之二少一率乘六率一二分又一二三分之
二（乃除法三率分母一二三分之二乃次商分母不可合并故附言之）多一率乘

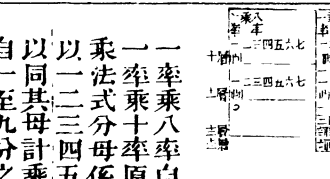


八率一二三四分又一二三分之
二少一率乘十率自一至六分又
一二三分之二為次商乘法式（尚
四率乘九率一位以即一率乘十二率而原實至十率而止故減去此後倣此）應減次商實其首位一率乘
四率一二三分之二相減却盡其
一率乘六率則原實分母係一二
三四五乘法式分母係一二分又
一二三分應以一二三除之三四
五乘之以同其母方可相減其一
率乘八率原實分母係一二三四五六七乘法式
係一二三四分又一二三分應一二三除之五六
七乘之其一率乘十率原實分母係一二三四五
六七八九乘法式係一二三四五六分又一二三
分應以一二三除之七八九乘之通計乘除得如
第六層少一率乘六率自一至五分之二十多一
率乘八率自一至七分之七十少一率乘十率自
一至九分之一百六十八為次商同母式以減次
商實其減餘數如第七層一率乘六率自一至五
分之十六少一率乘八率自一至七分之六十四
多一率乘十率自一至九分之一百六十為三商
實

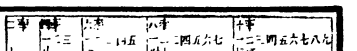
置三商實首位一率乘六率自一至五分之十六以除法首位一率一約之得六率自一至五分之十六即爲三商以乘除法得第八層一率乘六率自一至五分之十六少一率乘八率一二分又自一至五分之十六多一率乘十率一二三四分又自一至五分之十六爲三商乘法式應減三商實其首位一率乘六率自一至五分之十六減盡其一率乘八率原實分母係一二三四五六七乘法式分母係一二分又一二三四五分應以一二三四五除之三四五六七乘之以同其母其一率乘十率原實分母係一二三四五六七八九乘法式係一二三四分又一二三四五分應以一二三四五除之五六七八九乘之通計乘除得如第九層少一率乘八率自一至七分之三百三十六多一率乘十率自一至九分之二十〇十六以減三商實其減餘數如第十層爲一率乘八率自一至七分之二百七十二少一率乘十率自一至九分之一千八百五十六爲四商



置四商實首位一率乘八率自一至七分之二百七十二以除法首位一率一約之得八率自一至七分之二百七十二即爲四商以乘除法得第十一層一率乘八率自一至七分之二百七十二少一率乘十率一二分又自一至七分之二百七十二爲四商乘法式應減四商實其首位一率乘八率自一至七分之二百七十二減盡其一率乘十率原實分母係一二三四五六七八九乘法式分母係一二分又一二三四五六七分分應以一二三四五六七除之三四五六七八九乘之以同其母計乘除得如第十二層少一率乘十率自一至九分之九千七百九十二以減四商實其減餘數如第十三層爲一率乘十率自一至九分之七千九百三十六爲五商實

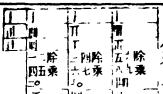


置五商實一率乘十率自一至九分之七千九百三十六以除法首位一率一約之得十率自一至九分之七千九百三十六即爲五商以乘除法得第十四層一率乘十率自一至九分之七千九百三十六爲五商乘法式以減五商實却盡通計求得本弧求切線各率分數爲二率一又四率一二三分之



二又六率自一至五分之十六又八率自一至七分之二百七十二又十率自一至九分之七千九百三十六也

細審切線率分其分母與正弦率分同是其遞求各率之除法亦必與求正弦同而起二除三除繼以四除五除而遞加矣惟其各率分子則由逐次遞減而成當分別其遞減之所由來而後求分子之法可見乃由前圖去繁就簡為第二圖其初商實分子均為單一其初商同母式分子為三五七九各奇數是逐率數根之所起均以各奇數減一矣而三相減得二即為第一分子其初減數（即次商同母式分子）則皆生於第一分子之二六率初減為一二三除三四五乘而三乘三除可相抵是一二除四五乘也八率初減亦一二三除而用五六七乘以較六率初減之乘除則除法均為一二三惟乘法則多六七乘少三四乘是以六率初減三四除之六七乘之即八率初減矣其十率初減亦一二三除而用七八九乘以較八率初減除法亦同惟多八九乘少五六乘是以八率初減五六除之八九乘之即十率初減矣而第一減餘十六即為第二分子其次減數（即三商母式分子）則皆生於第二分子之十六八率次減用一二三四五除三四五六七乘而三四五乘除可相抵是一二除六七乘也十率次減亦為一二三四五除而用五六七八九乘以較八率次減其除法相同惟乘法則多八九乘少三四乘是以八率次減三四除之八九乘之即十率次減也而第一減餘二百七十二即第三分子其三減數（即四商同母式分子）則生於第三分子之二百七十二十率三減用一二三四五六七除三四五六七八九乘而三四五六七乘除可相抵是一二除八九乘也而減餘即為第四分子



復由前圖變為第三圖第一層為初商實分子均為單一第二層為三五七九各率分子均起奇數減一第三層為減餘即數根其首位二為四

率分子即第一乘法第四層為初減數以第一乘法為實一二除四五乘為第一初減再加三四除

六七乘爲第二初減再加五六除八九乘爲第三初減通計其除法自一二而遞加其乘法則自四五而遞加第五層爲減餘其首位六率分子卽第二乘法第六層爲次減數以六率分子爲實一二除六七乘爲第一次減再加三四除八九乘爲第二次減通計其除法亦自一二而遞加其乘法則自六七而遞加第七層爲減餘其首位八率分子卽第三乘法第八層三減數以八率分子爲實一二除八九乘爲第一三減計其除法亦起一二其乘法則起八九雖圖止十率而遞加之例已可類推也而第九層減餘卽四乘法細按初減二減三減迭次乘除之例橫豎視之皆秩然而不紊則自二率至十率既然而自十率至千百率亦莫不皆然惟各率自爲分子非如弦矢求弧背之分子可以累次加乘而得故必先按分母逐率遞除爲各率用數而後以各分子爲乘法乘之此本弧求切線立法之所由來也

餘弧求切線

術曰先求各率分子爲遞次乘法　以一爲數根又爲第一乘法　三乘前數根以四乘二除得十二爲數根三乘前乘法四五遞乘之二三遞除之得二十爲初減數數根減初減得八爲第二乘法　置前數根六乘四除得十八爲數根置前初減六七遞乘之四五遞除之得四十二爲初減數置前乘法六七遞乘之二三遞除之五十六爲次減數數根減初減得二十四再減次減得三十二爲第三乘法　五乘前數根八乘六除得一百二十爲數根五乘前初減八九遞乘之六七遞除之得三百六十爲初減數五乘前次減八九遞乘之四五遞除之得一千〇〇八爲次減數五乘前乘法八九遞之二三遞除之得一千九百二十爲三減數數根減初減得二百四十再減次減得七百六十八再減三減得一千一百五十二爲第四乘法　置前數根十乘八除得一百五十爲數根置前初減十與十一遞乘之八九遞除之得五百五十爲初減數置前次減十與十一遞乘之六七遞除之得二千六百四十爲次減數置前三減十與十一遞乘之四五遞除之得一萬〇五百六十爲三減數置前乘法十與十一遞乘之二三遞除之得二萬一千一百二十爲四減數數根減初減得四百再

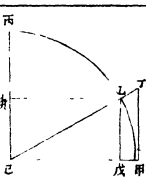
減次減得二千二百四十再減三減得八千三百二十再減四減得一萬二千八百爲第五乘法　凡數根起於相連兩耦數挨次一乘一除加第二乘法四法六乘又間位加一奇數乘加第二乘法三乘前數根其求各減數則用耦奇二數乘而逐次乘法遞加如第三乘法用一七再用耦奇二數除而逐次減數遞降如第二乘法六減用五除三減二降亦間位加一奇數乘如第二乘法二乘前乘法商四乘法乘前次減及前乘法乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

乃以半徑爲連比例二率本弧減象限得餘弧弧分爲二率二率自乘三率除之得一率爲第一數正次置三率餘弧二三遞除之爲五率用數第一乘法乘之爲第二數負　次以三率自乘二率除之得四率於是三除五率用數四率乘之二率除之得五率四五遞除之爲七率用數第二乘法乘之爲第三數負　置七率用數四率乘之二率除之得七率六七遞除之爲九率用數第三乘法乘之爲第四數負

五除九率用數四率乘之二率除之得九率八九遞除之爲十一率用數第四乘法乘之爲第五數負　置十一率用數四率乘之二率除之得十一率十與十一遞除之爲十三率用數第五乘法乘之爲第六數負　凡逐數除用耦奇二數再用各奇數間一數除之（加三除五率用數）第一數爲正第二數以下均爲負如是遞求至單位下乃置第一正數以并諸負數減之得切線

凡將近九十度其切線極大僅以弧背爲第一數挨次遞加數屬難合茲術本弧愈大則餘弧愈小餘弧愈小則所得之第一數乃愈大故求之反易可以濟本弧求切線之窮不可不備其本弧求割線後有餘弧求割線一術亦同此義

解曰凡餘弧正弦爲小股餘弧餘弦爲小句半徑爲大股則切線爲其大句故以半徑乘弧背求餘弦各率分數以弧背求正弦各率分數除之即得餘弧求切線各率分數



如圖甲乙爲本弧甲丙爲象限乙丙爲餘弧丁甲爲所求本弧切線庚乙與己戊同爲餘弧正弦庚己與乙戊同爲餘弧餘弦已甲類爲半徑以己戊小股（即庚乙）比乙戊小句（即己庚）若己甲大股與丁甲大句

一率　小股　弧背求正弦各率分數

二率　小句　弧背求餘弦各率分數

三率　大股　半徑

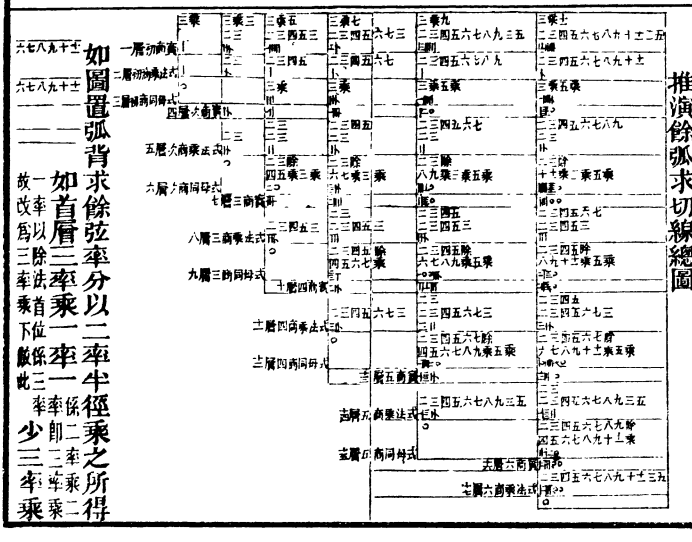
四率　大句　餘弧求切線各率分數

凡餘弧求切線其法實均須改率數何也餘弦首位爲一率一以一率半徑乘之則初商實首位爲一率乘一率而除法首位係二率則初商爲一率自乘二率除之之數尙在一率半徑之前一率故須改半徑爲二率弧分爲三率則初商可爲一率是正弦餘弦各率分數以及半徑均須降一率命之

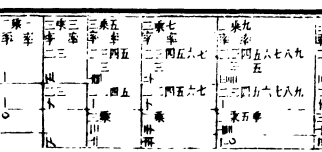
其餘弦率分又須添分母何也初商實分母卽餘弦分母起第二位之二而除法正弦分母起第二位之二三故餘弦各須添一奇數分母使不至小於除法分母入算時方不必變初商實猶未也凡求餘弧求切線率分其逐率乘除求分子而逢奇數大率不受除故自第三位以下須加分母三第五位以下須加分母五庶分子不至奇零七位以下可類推

通計改得半徑爲二率正弦爲三率一少五率二三分之一多七率二三四五分之一少九率自二至七分之一多十一率自二至九分之一少十三率自二至十一分之一此截六位以見例下倣此餘弦改得二率一少四率二三分之二多六率二三四五分又三分之十五少八率自二至七分又三分之二十一多十率自二至九分又三分又五分之一百三十五少十二率自二至十一分又三分又五分之一百六十五也

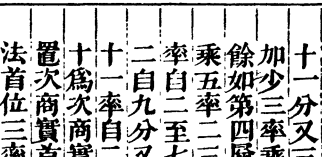
推演餘弧求切線總圖



如圖置弧背求餘弦率分以二率半徑乘之所得如首層二率乘一率係二率卽二率乘一率以除法首位係二率乘下餘此故改爲二率乘少三率乘



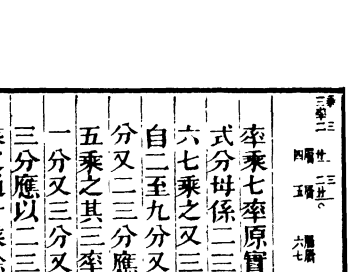
三率二三分之三多三率乘五率二三四五分又三分之十五少三率乘七率自二至七分又三分之二十一多三率乘九率自二至九分又三分又五分之一百三十五少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一百六十五爲乘得數便爲初商實以弧背求正弦率分爲法除之置初商實首位三率乘一率一以除法首位三率一約之得一率一即爲初商以乘除法所得如次層三率乘一率一少三率乘三率二三分之一多三率乘五率二三四五分之一少三率乘七率自三至七分之一多三率乘九率自二至九分之一少三率乘十一率自二至十一分之一爲初商乘法式應減初商實其首位三率乘一率一減盡其三率乘三率分母相同其三率乘五率與三率乘七率則原實分母多三分應加三乘其三率乘九率與三率乘十一率則原實分母多三分又五分應加三乘又五乘通計乘得如第三層三率乘五率二三四五分又三分之三少三率乘七率自二至七分又三分之三多三率乘九率自二至九分又三分又五分之十五少三率乘十一率自二至十一分又五分之十五爲初商同母式內加少三率乘三率二三分之一以減初商實其減餘如第四層少三率乘三率二三分之二多三率乘五率二三四五分又三分之十二少三率乘七率自二至七分又三分之十八多三率乘九率自二自九分又三分又五分之一百二十少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一百五十爲次商實



置次商實首位少三率乘二率二三分之二以除法首位三率一約之得少三率二三分之二即爲次商以乘除法所得如第五層少三率乘二率二三分之二多三率乘五率二三分又二三分之二少三率乘七率二三四五分又二三分之二多三率乘九率自二至七分又二三分之二少三率乘十一率自二至九分又二三分之二爲次商乘法式應減次商實其首位三率乘三率二三分之二減盡其二率乘五率則次商實分母係二三四五分又三分乘法分母係二

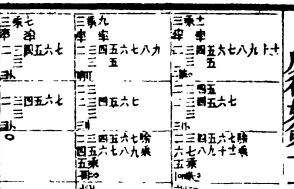
三分又二三分應以二三除之四五乘之又三乘之以同其母其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式分母係二三四五分又二三分應以二三除之六七乘之又三乘之其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分乘法式係自二至七分又二三分應以二三除之八九乘之又三乘之五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係自二至九分又二三分應以二三除之十與十一乘之又三乘之五乘之通計乘除得如第六層三率乘五率二三四五分又三分之二十少三率乘七率自二至七分又三分之四十二多三率乘九率自二至九分又三分又五分之三百六十少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之五百五十以減次商實其減餘如第七層少三率乘五率二三四五分又三分之八多三率乘七率自二至七分又三分之二十四少三率乘九率自二至九分又三分又五分之二百四十多三率乘十一率自二自十一分又三分又五分之四百爲三商實

置三商實首位少三率乘五率二三四五分又三分之八以除法首位三率一約之得少五率二三

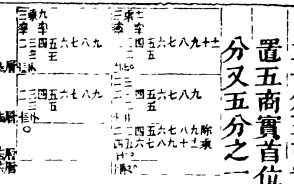


四五分又三分之八即爲二商以乘除法所得如第八層少三率乘五率二三四五分又三分之八多三率乘七率二三四五分又三分之八少三率乘九率二三四五分又二三四五分又三分之八多三率乘十一率自二至七分又二三四五分又三分之八爲三商乘法式應減三商實其首位三率乘五率二三四五分又三分之八滅盡其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係二三分又二三四五分又三分應以二三四五除之四五六七乘之以同其母其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係二三四五分又二三四五分又三分應以二三四五除之六七八九乘之又五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係自二至七分又二三四五分又三分應以二三四五除之八九十十一乘之又五乘之通計乘除得如第九層三率乘七率自二至七分又三分之五十六少三率乘九率自二至

九分又三分又五分之一千〇〇八多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二千六百四十爲三商同母式以減三商實其減餘如第十層少三率乘七率自二至七分又三分之三十二少三率乘九率自二至九分又三分又五分之七百六十八少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二千二百四十爲四商實

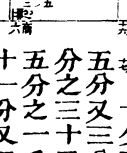


置四商實首位少三率乘七率自二至七分又三分之三十二以除法首位三率一約之得七率自二至七分又三分之三十二即爲四商以乘除法所得如第十一層少三率乘七率自二至七分又三分之三十二多三率乘九率二三分又自二至七分又三分之三十二少三率乘十一率二三四五分又自二至七分又三分之三十二爲四商乘法式應減四商實其首位三率乘七率自二至七分又三分之三十二減盡其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係二三分又自二至七分又三分之三十二減盡其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係二三分又自二至七除之自四至九乘之又五乘之以同其母而三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係二三四五分又自二至七分又三分之二千六百四十爲三商同母式以減三商實其減餘如第十二層三率乘九率自二至九分又三分又五分之七百六十八少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一千九百二十少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之五萬〇五百六十以減四商實其減餘如第十三層少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一千一百五十二多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之八千三百二十爲五商實

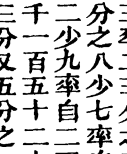


置五商實首位少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一千一百五十二以除法首位三率一約之得少九率自二至九分又三分又五分之一千一百五十二即爲五商以乘除法所得如第十四層少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一千一百五十二多三率乘十一率二三分又自二至九分又三分又五分之一千一百五十二爲五商乘法式應減五商實其首位少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一千

一百五十二減盡其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係二三分又自二至九分又三分又五分應以自二至九除之自四至十一乘之以同其母計乘除得如第十五層三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二萬一千一百二十以減五商實所得如第十六層少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一萬二千八百爲六商實



置六商實以除法首位三率一約之得少十一率自二至十一分又三分又五分之一萬二千八百即爲六商以乘除法所得如第十七層少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一萬二千八百以減六商實却盡通計求得餘弧求切綫各率分數爲一率



一少三率二三分之二少五率二三四五分又三分之八少七率自二至七分又三分之三十二少九率自二至九分又三分又五分之一千一百五十二少十一率自二至十一分又三分又五分之一萬二千八百也細審餘弧求切線各率分數其分母較正弦率分惟多閒位奇數是其遞率除法與求正弦同而自五率以後閒位加一奇數除矣于是審其各率分子遞減之由來乃由前圖去繁就簡爲第二圖其初商實三率分子爲三同母式爲一相減得二即第一數根初商實五率分子爲三乘五同母式爲三乘一相減爲二乘四是以第一數根三乘之又四乘二除即第二數根也其七率分子爲三乘七與三乘一相減爲三乘六是以第二數根六乘四除即第三數根也其九率分子爲十五乘九與十五乘一相減爲十五乘八是以第三數根五乘之又八乘六除即第四數根也十一率分子爲十五乘十一與十五乘一相減爲十五乘十是以第四數根十乘八除即第五數根也而第一數根即爲三率分子其初減數則皆根於三率分子之二五率初減用二三除四五乘又三乘七率初減二三除六七乘又三乘以較五率初減其二三除及又三乘並同惟多六七乘少四五乘是以五率初減四五除之六

初商密率　初數
初商　次數　初減數
次商　三數　次減數
三商　四數　三減數
四商　五數　四減數

七乘之即七率初減也其九率初減二三除八九乘又三乘並同惟多八九乘又五乘以較七率初減其除法并又三乘並同惟多八九乘又五乘又六七乘是以七率初減六七除之八九乘之又五乘之即九率初減也其十一率初減二三除十與十一乘又三乘五乘以較九率初減其除法及三乘五乘並同惟多十與十一乘少八九乘是以九率初減八九除之十與十一乘之即十一率初減也而第一減餘即爲五率分子其次減數皆根于五率分子之八七率次減二三四五除四五六七乘而四五乘除可相抵是二三除六七乘也其九率次減二三四五除六七八九乘又五乘以較七率次減其除法同惟多八九乘又三乘少四五乘是以七率次減四五除之八九乘之又五乘之即九率次減也十一率次減二三四五除八九十一乘又五乘以較九率次減其除法及五乘並同惟多十與十一乘少六七乘是以九率次減六七除之十與十一乘之即十一率次減也而第一減餘即七率分子其三減數皆根于七率分子之三十二九率三減自二至七除自四至九乘又五乘而四五六七乘除可相抵是二三除八九乘又五乘也十一率三減自二至七除自六至十一乘又五乘以較九率三減其除法及五乘並同惟多十與十一乘少四五乘是以九率三減四五除之十與十一乘之即十一率三減也其十二率三減自二至七除自四至九乘又五乘而自四至九乘除可相抵是二三除十與十一乘也而減餘一萬二千八百爲十一率分子復由前圖爲第三圖第一層初商減餘數即數根起于二加二除四乘又三乘爲第二數根再加四除六乘爲第三數根再加六除八乘又五乘爲第四數根再加八除十乘爲第五數根通計其乘除爲相連兩耦數一除一乘又間位加一奇數乘其首位減

餘二爲三率分子即第一乘法第二層初減數以三率分子爲實二三除四五乘又三乘爲第一初減再加四五除六七乘爲第二初減再加六七除八九乘又五乘爲第三初減再加八九除十與十一乘爲第四初減通計其除法則自二三而遞加

其乘法則自四五而遞加而亦間位加一奇數乘第三層爲減餘首位五率分子八卽第二乘法第四層次減數以五率分子爲寶二三除六七乘爲第一次減再加四五除八九乘又五乘爲第二次減再加六七除十與十一乘爲第三次減通計其除法亦自二三而遞加其乘法則自六七而遞加而亦間位加一奇數乘第五層爲減餘首位七率分子三十二卽第三乘法第六層三減數以七率分子爲寶二三除八九乘又五乘爲第一二減再加四五除十與十一乘爲第二三減通計其除法亦自二三而遞加其乘法則自八九而遞加而間位亦加一奇數乘第七層爲減餘首位九率分子一千一百五十二卽第四乘法第八層爲四減數以九率分子爲寶二三除十與十一乘爲第一四減計其除法亦起二三而乘法則起十與十一雖圖止十一率而遞加之例已可類推也而第九層減餘十一率分子一萬二千八百卽第五乘法細按數根及初減次減三減四減其迭次乘除與間位乘法之例橫豎視之皆秩然而不紊則自十一率以前已然而自十一率以後必皆然惟逐率自爲分子與本弧求切線同故亦先求用數此餘弧求切線立術之由也

弧背求切線算式

凡連比例術之所慮者位不降也位不降則雖有其術而不適於用弧背求弦矢術分母逐率加大而分子均爲單一故其降位甚易若弧背求切線則分母逐率加大而分子亦逐率加大故其降位較難苟專恃一術必不能徧求各切線惟本弧求切線餘弧求切線兩術並用而後一象限內之切綫可以徧求然兩術之中又有降位難易之不同餘弧求切線有間位奇數分母故分母大於本弧求切線而分子轉小於本弧求切線是以餘弧求切線其降位較易於本弧求切線茲將九十度內分爲兩限其自十秒至三十度則用本弧求切線法求之自三十度至八十九度五十九分五十秒則用餘弧求切線法求之庶極多不過十數而降位無難矣

弧線表

設全徑二百億　半徑一百億

一秒	四八四八一三六八一一〇九五三五九一三六	七分	二〇三六二一七四六六〇〇五一
二秒	九六九六二七三二一九〇七一九七三	八分	三三三七一〇三六六三五七七三
三秒	一四五四四四一〇四三三八六〇七九八	九分	四八四八一三六八一一〇九五三五九一三六
四秒	一九三九二五四七二四四三八一四三九七	一十分	九六九六二七三二一九〇七一九七三
五秒	二四三四〇六八四〇五五四七六七九九七	二十分	一四五四四四一〇四三三八六〇七九八
六秒	二九〇八八二一〇八六六五七三二五九六	三十分	一九三九二五四七二四四三八一四三九七
七秒	三三九三六九五七七六六七五一九六	四十分	二四三四〇六八四〇五五四七六七九九七
八秒	三八七八五〇九四四八八七六二八七五五	五十分	二九〇八八二一〇八六六五七三二五九六
九秒	四三六三三三二九九八五八三三九四	一度	三三九三六九五七七六六七五一九六
一十秒	四八四八一三六八一一〇九五三五九四	二度	三八七八五〇九四四八八七六二八七五五
二十秒	九六九六二七三二一九〇七一九八七	三度	四三六三三三二九九八五八三三九四
三十秒	一四五四四四一〇四三三八六〇八〇	四度	四八四八一三六八一一〇九五三五九四
四十秒	一九三九二五四七二四四三八一四四〇	五度	五三三五九八七五五五九八二九九
五十秒	二四三四〇六四〇五五四七六八〇〇	六度	五八一七七六四一七三二一四四三二九
一分	二九〇八八三〇八六二七三二一六〇	七度	六二九二五四七二四四三八一四四〇
二分	五八一七七六四一七三二一四四三二九	八度	六七六四〇五五四七六八〇〇
三分	八七二六四六二五九七一六四七九	九度	七二六四七二四四三八一四三九七
四分	一一六三五五八三四六二八八六	一十度	七七六四〇五五四七六八〇〇
五分	一四五四四四一〇四三三八六〇八	二十度	八七二六四六二五九七一六四七九
六分	一七四五三三九二五一九九四三三〇	三十度	九六九六二七三二一九〇七一九八七
		四十度	一〇六六四〇五五四七六八〇〇
		五十度	一一六三五五八三四六二八八六

六十度　一〇四七九七五二九七
七十度　一三一七三〇四七六三九
八十度　一二九六三六四〇一五九五
象限　一七〇七九六三三七七四八九六八一九三三三三
半周　三一四一五九二六五三五八九七三三八四六二六四三
全周　六二八三一八五三〇七一五三五八九七九二五八

凡弧背求切割二線其用小餘與弧背求弦矢不同蓋弦矢二線必小于弧背故小餘位數不必多若切割二線必大于弧背故小餘位數宜多且非特此也如遇餘弧求切割二線則弧分愈小而所求之線必愈大非多用小餘位數則無以求極大之線矣然小餘位數亦自有定如半徑一百億係十一位自乘得二十一位一秒之弧背係五位于半徑界內減五位得十六位加小餘二位得十八位可知一秒之切線割線連小餘均係十八位一秒之弧背既止五位自當用小餘十四位自此弧背大一位則減小餘二位挨次遞減自然數用不至尾數不準又半徑用一百億者據八線對數表也若八線表則半徑僅八位一秒之切割二線連小餘止十五位一秒之弧背止二位應用小餘亦十三四位入算時截位用之可也

本弧求切線各率乘法表

四率	第一乘法	一	
六率	第二乘法	六	
八率	第三乘法	一七三	
十率	第四乘法	七一三	
十二率	第五乘法	三五三九二	
十四率	第六乘法	一三五五一三五	
十六率	第七乘法	九〇三八〇〇〇〇	
十八率	第八乘法	三〇九〇〇〇〇〇〇〇	
二十率	第九乘法	一九一〇〇〇〇〇〇〇〇〇	

餘弧求切線各率乘法表

三率	第一乘法	二	
五率	第二乘法	八	
七率	第三乘法	三三	
九率	第四乘法	一二五	
十一率	第五乘法	一三八〇〇	
十三率	第六乘法	一四五一六六	
十五率	第七乘法	三〇一五六〇〇	
十七率	第八乘法	七四六九〇〇〇〇	
十九率	第九乘法	二五八〇〇〇〇〇〇	

凡求遞次乘法不無窮盡而求至第九而止者緣本弧求切線止求至三十度以內餘弧求切線止求至三十度以外則有第九乘法而已數用不必多求也然此但指半徑八位而言若八線對數表半徑用十一位則乘法亦須增求又本弧求切線第七乘法係一九〇三七五七三一二第八乘法係二〇九八六五三四二九七六第九乘法係二九〇八八八五一一二八三二餘弧求切線第八乘法係七四六六八七六九二八第九乘法係二五八七五五六七五六一六以入算時不過截用數位其尾數無所用之故不列入存數但以〇存其位數以資入算時定位之用而已

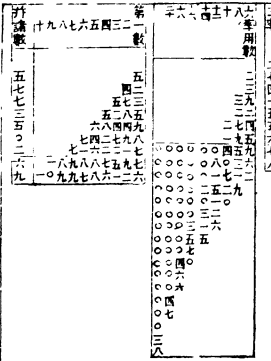
凡設度自十秒至三十度則用本弧求切線法求之而降位最難取數最多者莫如求三十度之切線今將設弧背三十度以本弧求切線算式列於後

法檢弧線表得三十度弧分五二三五九八七六

凡小餘旁注

為第一數　次以半徑一〇〇〇〇〇〇〇〇為一率弧分為二率二率自乘一率除之得三率二七四一五五六八置第一數以三率乘之一率除之得四率二除之三除之得二三九二四五九六二為六率用數以第一乘法二乘之得四七八四九一九二為第二數　次置六率用數以三率乘之一率除之得六率四除之五除之得三二七九五三一九為八率用數以第二乘法一六乘之得五二四七二五一為第三數　次置八率用數以三率乘之一率除之得八率六除之七除之得二四七二〇為十率用數以第三乘法二七二乘之得五八二二七六為第四數　次置十率用數以三率乘之一率除之得十率八除之九除之得〇八一五二二六凡小餘雜單位俱有空位則以〇存其位數為十二率用數以第四乘法七九三六乘之得六四六八為第五數　次置十二率用數以三率乘之一率除之得十二率十除之十一除之得〇一二五為十四率用數以第五乘法三五三七九二乘之得七一八七為第六數　次置十四率用數以三率乘之一率除之得十四率十二除之十三除之得〇三五七〇為十六率用數第六乘法一二六八二五六乘之得七九九為第七數　次置十六率用數以三率乘之一率除之得十六率十四除之十五除之得〇四六六為十八率用數第七乘法一九〇三八〇〇〇〇乘之得八九為第八數　次置十八率用數以三率乘之一率除之得十八率十六除之十七除之得

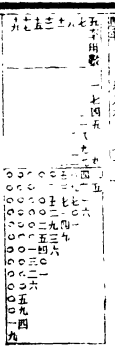
。四七爲二十率用數以第八乘法二〇九九〇〇〇〇〇〇乘之得一。爲第九數　次置二十率用數以三率乘之一率除之得二十率十八除之十九除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇三八以第九乘法二九一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇乘之得一爲第十數　以諸數相併得五七七三五〇二六九小餘滿五進一算得五七七三五〇〇三爲所求三十度切線

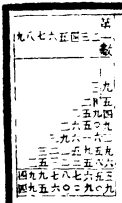


凡設度自三十度至八十九度五十九分五十秒則用餘弧求切線法求之而降位最難取數最多者亦莫如求三十度之切線今將設弧背三十度以餘弧求切線算式列於後

法以半徑一〇〇〇〇〇〇〇〇。爲二率以三十度減象限得六十度爲餘弧檢弧線表得餘弧弧分一〇四七一九七五九一爲三率二率自乘三率除之得一率九五四九二九六五九爲第一數正　次置三率弧分二除之三除之得一七四五三二九二九爲五率用數第一乘法二乘之得三四九〇六五八五〇爲第二數負　次置三率自乘二率除之得一〇九六六二二七一一爲四率於是三除五率用數四率乘之二率除之得五率四除之五除之得三一八九九四八一六爲七率用數第二乘法八乘之得二五五一九五六九爲第三數負　次置七率用數四率乘之二率除之得七率六除之七除之得八三二八九七〇一爲九率用數第三乘法三二乘之得二六六五二七〇爲第四數負　五除九率用數四率乘之二率除之得九率八除之九除之得二五三七一四九爲十一率用數第四乘法一一五二乘之得二九二二八〇爲第五數負　次置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十除之十一除之得一五二九五六爲十三率用數第五乘法一二八〇〇乘之得三二三七九爲第六數負　七除十三率用數四率乘之二率除之得十三率十二除之十三除之得二五四〇一爲十五率用數第六乘法一四一五一六八乘之得三五九五爲

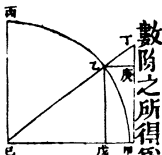
第七數負　次置十五率用數四率乘之二率除之得十五率十四除之十五除之得〇〇〇〇〇〇〇一三二六爲十七率用數第七乘法三〇一〇五六〇〇乘之得三九九爲第八數負　九除十七率用數四率乘之二率除之得十七率十六除之十七除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇五九四爲十九率用數第八乘法七四六九〇〇〇〇〇乘之得四四爲第九數負　次置十九率用數四率乘之二率除之得十九率十八除之十九除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇一九　第九乘法二五八八〇〇〇〇〇〇〇〇〇乘之得〇五爲第十數負　以第二數以下負數相併得三七七五七九三八八以減第一正數得五七七三五〇二七一小餘滿五進一算得五七七三五〇二七爲所求三十度切線也





本弧求割綫

術曰先求各率分子爲遞次乘法　通以單一爲數根置單一以三四遞乘之一二遞除之得六爲初減數數根減初減得五爲第一乘法　置前初減五六遞乘之三四遞除之得十五爲初減數置前乘法五六遞乘之一二遞除之得七十五爲次減數數根減初減得十四再減次減得六十一爲第二乘法　置前初減七八遞乘之五六遞除之得二十八爲初減數置前次減七八遞乘之三四遞除之得三百五十爲次減數置前乘法七八遞乘之一二遞除之得一千七百〇八爲三減數數根減初減得二十七再減次減得三百二十三再減三減得一千三百五十八爲第三乘法　置前初減九十遞乘之七八遞除之得四十五爲初減數置前次減九十遞乘之五六遞除之得一千〇五十爲次減數置前三減九十遞乘之三四遞除之得一萬二千八百一十爲三減數置前乘法九十遞乘之一二遞除之得六萬二千三百二十五爲四減數數根減初減得四十四再減次減得一千〇〇六再減三減得一萬八千八百〇四再減四減得五萬〇五百二十一爲第四乘法　凡逐次乘用奇耦二數（如第一乘法五六乘第三乘法七八乘）其逐次除亦用奇耦二數而遞降（如第二乘法初減三乘法降一四除次減一二除）乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子即爲遞次乘法乃以半徑爲連比例一率本弧弧分爲二率二率自乘一率除之得三率二除之爲第一數　次置第一數以三率乘之一率除之得五率三四遞除之爲七率用數以第一乘法乘之爲第二數　次置七率用數以三率乘之一率除之得七率五六遞除之爲九率用數以第二乘法乘之爲第三數　次置九率用數以三率乘之一率除之得九率七八遞除之爲十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九十遞除之爲十三率用數以第四乘法乘之爲第五數　如是遞求至單位下以諸數相并得割線半徑差加半徑即割綫

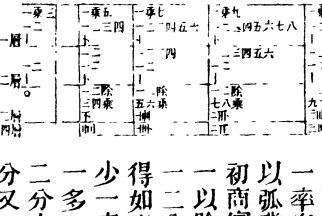


解曰凡餘弦爲大句半徑爲大弦正矢爲小句則割線減半徑名割線半徑差爲其小弦故以半徑乘弧背求正矢各率分數以弧背求餘弦各率分數附之所得爲本弧求割綫半徑差各率分數

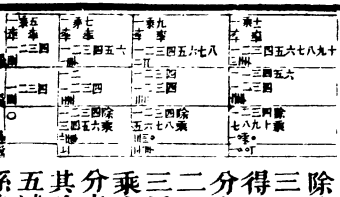
如圖甲乙爲本弧甲丙爲象限乙丙爲餘弧己丁爲所求割綫乙丁爲割線半徑差己戊爲餘弦戊甲即乙庚爲正矢己乙類爲半徑以

己戊大句比己乙大弦若乙庚小句與乙丁小弦
一率　大句　弧背求餘弦各率分數
二率　大弦　半徑
三率　小句　弧背求正矢各率分數
四率　小弦　本弧求割線半徑差各率分數
推演本弧求割線總圖

如圖先置弧背求正矢各率分數以一率半徑乘之所得如首層爲一率乘三率一二分之一少一



率乘五率一二三四分之一多一率乘七率自一至六分之一少一率乘九率自一至八分之一多一率乘十一率自一至十分之一爲初商實乃以弧背求餘弦各率分數除之先置初商實首位一率乘三率一二分之一以除法首位一率一約之得三率一二分之一即爲初商以乘除法所得如次層一率乘三率一二分之一少一率乘五率一二分又一二分之一多一率乘七率一二三四分又一二分之一少一率乘九率自一至六分又一二分之一多一率乘十一率自一至八分又一二分之一爲初商乘法式應減初商實其一率乘三率一二分之一相減却盡其一率乘五率則原實分母係一二三四分乘法式係一二分又一二分應以一二除之三四乘之以同其母其一率乘七率原實分母係自一至六分乘法式係一二三四分又一二分應以一二除之五六乘之其一率乘九率原實分母係自一至八分乘法式係自一至六分又一二分應以一二除之七八乘之其一率乘十一率原實分母係自一

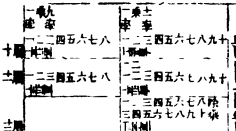


至十分乘法式係自一至八分又一二分應以一二除之九十乘之通計乘除得如第三層少一率乘五率一二三四分之六多一率乘七率自一至六分之十五少一率乘九率自一至八分之二十八多一率乘十一率自一至十分之四十五爲初商同母式以減初商實其減餘如第四層一率乘五率一二三四分之五少一率乘七率自一至六分之十四多一率乘九率自一至八分之二十七少一率乘十一率自一至十分之四十四爲次商實

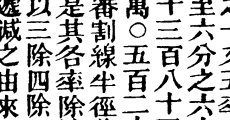
置次商實首位一率乘五率一二三四分之五以除法首位一率一約之得五率一二三四分之五卽爲次商以乘除法所得如第五層一率乘五率一二三四分之五少一率乘七率一二分又一二三四分之五多一率乘九率一二三四分又一二三四分之五少一率乘十一率自一至六分又一二三四分之五爲次商乘法式應減次商實其首位一率乘五率一二三四分之五減盡其一率乘七率則原實分母係自一至六分乘法式係一二分又一二三四分應以一二三四除之三四五六乘之以同其母其一率乘九率原實分母係自一至八分乘法式係一二三四分又一二三四分應以一二三四除之五六七八乘之其一率乘十一率原實分母係自一至十分乘法式係自一至六分又一二三四分應以一二三四除之七八九十乘之通計乘除得如第六層少一率乘七率自一至六分之七十五多一率乘九率自一至八分之三百五十少一率乘十一率自一至十分之一千〇五十爲次商同母式以減次商實其減餘如第七層一率乘七率自一至六分之六十一少一率乘九率自一至八分之三百二十三多一率乘十一率自一至十分之一千〇〇六爲三商實

置三商實首位一率乘七率自一至六分之六十一以除法首位一率一除之得七率自一至六分之六十一卽爲三商以乘除法所得如第八層一率乘七率自一至六分之六十一少一率乘九率一二分又自一至六分之六十一多一率乘十一率一二三四分又自一至六分之六十一爲三商乘法式應減三商實其首位一率乘七率自一至六分之六十一減盡其一率乘九率原實分母係自一至八分乘法式係一二分又自一至六分應

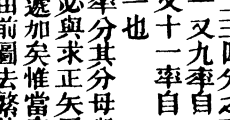
以自一至六除之自三至八乘之以同其母其一率乘十一率原實分母係自一至十分乘法式係一二分又自一至六分應以自一至六除之自五至十乘之通計乘除得如第九層少一率乘九率自一至八分之一千七百〇八多一率乘十一率自一至十分之一萬二千八百一十爲三商同母式以減三商實其減餘如第十層一率乘九率自一至八分之一千三百八十五少一率乘十一率自一至十分之一萬一千八百〇四爲四商實



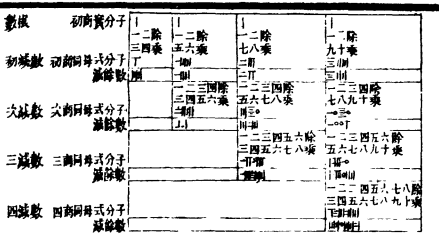
置四商實首位一率乘九率自一至八分之一千三百八十五以除法首位一率約之得九率自一至八分之一千三百八十五卽爲四商以乘除法所得如第十一層一率乘九率自一至八分之一千三百八十五少一率乘十一率一二分又自一至八分之一千三百八十五爲四商乘法式應減四商實其首位一率乘九率自一至八分之一千三百八十五減盡其一率乘十一率原實分母係自一至十分乘法式係一二分又自一至八分應以自一至八除之自三至十乘之計乘除得如第十二層少一率乘十一率自一至十分之六萬三千三百二十五爲四商同母式以減四商實其減餘如第十三層一率乘十一率自一至十分之五萬〇五百二十一爲五商實



置五商實以除法首位一率一約之得十一率自一至十分之五萬〇五百二十一卽爲五商以乘除法所得如第十四層一率乘十一率自一至十分之五萬〇五百二十一爲五商乘法式以減原實却盡通計求得本弧求割線半徑差各率分數爲三率一二分之一又五率一二三四分之五又七率自一至六分之六十一又九率自一至八分之一千三百八十五又十一率自一至十分之五萬〇五百二十一也

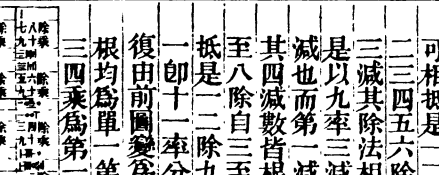


細審割線半徑差率分其分母與正矢率分同是其各率除法必與求正矢同而起二除繼以三除四除而遞加矣惟當審其各率分子遞減之由來乃由前圖去繁就簡爲第二圖其初商實分子均爲單一卽數根其初減數則起三四乘單一以一二除之七率初減



亦一二除而用五六乘是以是以前初減三四除五六乘卽七率初減也九率初減亦一二除而用七八乘是以七率初減五六除七八乘卽九率初減也十一率初減亦一二除而用九十乘是以九率初減七八除九十乘卽十一率初減也而第一減餘五卽爲五率分子其次減數皆根于五率分子七率次減爲一二三四除三四五六乘而三四乘除可相抵是一二除五六乘也九率次減亦一二三四除而用五六七八乘以較七率次減其除法相同惟乘法多七八乘少三四乘是以七率次減七八乘之三四除之卽九率次減也其十一率次減亦一二三四除而用七八九十乘以較九率次減其除法相同惟乘法多九十乘少五六乘是以九率次減五六除之九十乘之卽十一率次減也而第一減餘六十一卽七率分子其三減數皆根於七率分子九率三減爲一二三四五六除三四五六七八乘而三四五六乘除可相抵是一二除七八乘也其十一率三減亦一二三四五六除而用五六七八九十乘以較九率三減其除法相同惟乘法則多九十乘少三四乘是以九率三減三四除之九十乘之卽十一率三減也而第一減餘一千三百八十五卽九率分子其四減數皆根於九率分子十一率四減用自一至八除自三至十乘而三四五六七八乘除可相抵是一二除九十乘也而減餘五萬〇五百二十一卽十一率分子

復由前圖變爲第三圖第一層初商實分子卽數根均爲單一第二層初減數以單一爲實一二除三四乘爲第一初減再加三四除五六乘爲第二初減再加五六除七八乘爲第三初減再加七八除九十乘爲第四初減通計其除法自一二而遞加其乘法則自三四而遞加第三層爲減餘其首位五率分子卽第一乘法第四層次減數以五率分子爲實一二除五六乘爲第一次減再加三四除七八乘爲第二次減再加五六除九十乘爲第三次減通計其除法亦



自一二而遞加其乘法則自五六而遞加第五層爲減餘其首位七率分子卽第二乘法第六層三減數以七率分子爲實一二除七八乘爲第一三減再加三四除九十乘爲第二三減通計其除法亦自一二而遞加其乘法則自七八而遞加第七層爲減餘其首位九率分子卽第三乘法第八層四減數以九率分子爲實一二除九十乘爲第一四減計其除法亦起一二其乘法則起九十雖圖止十一率而遞加之例已可類推也第九層減餘十一率分子卽第四乘法細按初減二減三減四減迭次乘除之例橫竪視之皆秩然而不紊則自三率至十一率卽可推至多率惟各率亦各自爲分子故亦先求用數求得數後加半徑便爲割線此本弧求割線立術之由也

欲弧求割線

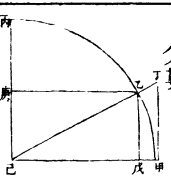
術曰先求各率分子爲遞次乘法　三乘單一得三爲數根又二乘單一以四五遞乘之二三遞除之得一十爲初減數數根減初減得七爲第一乘法　置前數根三爲數根置前初減以六七遞乘之四五遞除之得二十一爲初減數置前乘法六七遞乘之二一遞除之得四十九爲次減數數根減初減得十八再減次減得三十一爲第二乘法　五乘前數根得十五爲數根五乘前初減以八九遞乘之六七遞除之得一百八十爲初減數五乘前次減以八九遞乘之四五遞除之得八百八十二爲次減數五乘前乘法以八九遞乘之二三遞除之得一千八百六十爲三減數數根減初減得一百六十五再減次減得七百十七再減三減得一千一百四十三爲第三乘法

置前數根十五爲數根置前初減十與十一遞乘之八九遞除之得二百七十五爲初減數置前次減十與十一遞乘之六七遞除之得二千三百一十爲次減數置前三減十與十一遞乘之四五遞除之得一萬〇二百三十爲三減數置前乘法十與十一遞乘之二三遞除之得一萬〇九百五十五爲四減數數根減初減得二百六十再減次減得二千〇五十再減三減得八千一百八十再減四減得一萬二千

七百七十五爲第四乘法　凡數根起單一而閒位用奇數乘（如第一乘法用三乘第二乘法用五乘）其求各減數則用耦奇二數乘而逐次乘法遞加（如第二乘法用六七乘第三乘法用八九乘）亦用耦奇二數除而逐次減數遞降（如第二乘法減四五除次減第三乘法減六七除次減及前乘法）又閒位添一奇數乘（如第一乘法又三乘單一前乘法）乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

乃以半徑爲連比例二率本弧減象限得餘弧弧分爲三率二率自乘三率除之得一率爲第一數　次置三率弧分二三遞除之爲第二數　次以三率自乘二率除之得四率於是三除第二數以四率乘之二率除之得五率四五遞除之爲七率用數第一乘法乘之爲第三數　次置七率用數以四率乘之二率除之得七率六七遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第四數　五除九率用數以四率乘之二率除之得九率八九遞除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第五數　次置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十與十一遞除之爲十三率用數第四乘法乘之爲第六數　凡逐次除用耦奇二數再用各奇數閒一數除之如是遞求至單位下乃并諸數得割線

解曰凡以餘弧正弦爲小股半徑爲小弦半徑又爲大股則割線爲其大弦故以半徑自乘爲實弧背求正弦各率分數除之即得餘弧求割線各率分數



如圖甲乙爲本弧甲丙爲象限乙丙爲餘弧己丁爲所求割線庚乙即己戊爲餘弧正弦己甲己乙類爲半徑以己戊小股比己乙小弦若己甲大股與己丁大弦

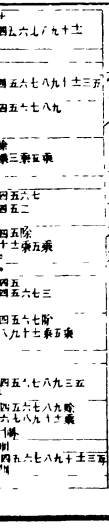
首率　小股　小弦
中率　大股
末率　大弦

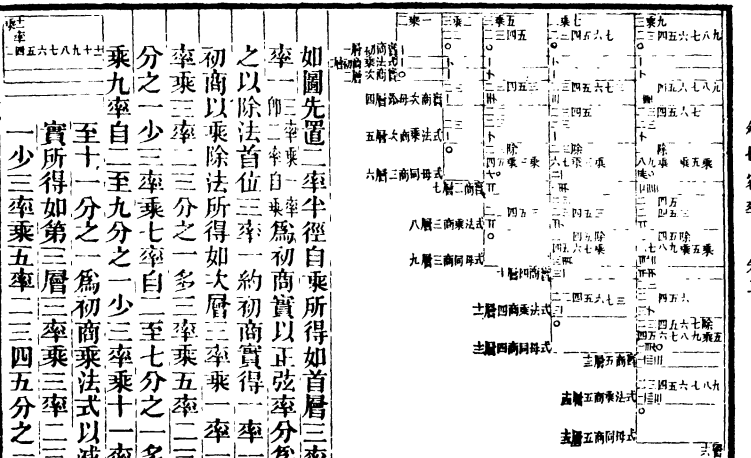
弧背求正弦各率分數

餘弧求割線各率分數

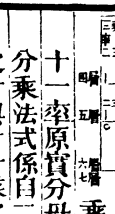
凡餘弧求割線亦須改率數與求切線同當以半徑爲二率弧分爲三率其除法正弦率分爲三率一少五率二三分之一多七率二三四五分之一少九率自二至七分之一多十一率自二至九分之一少十三率自二至十一分之一也

推演餘弧求割線總圖

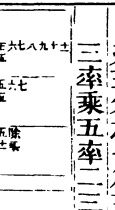




如圖先置二率半徑自乘所得如首層三率乘一率一仍二率自乘爲初商實以正弦率分爲法除之以除法首位三率一約初商實得一率一卽爲初商以乘除法所得如次層三率乘一率一少三率乘三率二率分之一多三率乘五率二三四五分之一少三率乘七率自二至六分之一多三率乘九率自二至九分之一少三率乘十一率自二至十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三層三率乘三率二三分之一少三率乘五率二三四五分之一多三率乘七率自二至七分之一少三率乘九率自二至九分又二三分之一少三率乘十一率自二至十一分之一多三率乘十三率自二至十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四層三率乘五率二三四五六分之一多三率乘七率自二至七分之一少三率乘九率自二至九分又二三分之一少三率乘十一率自二至十一分之一多三率乘十三率自二至十三分之一少三率乘十五率自二至十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五層三率乘七率二三四五六七分之一多三率乘九率自二至九分又二三分之一少三率乘十一率自二至十一分之一多三率乘十三率自二至十三分之一少三率乘十五率自二至十五分之一多三率乘十七率自二至十七分之一少三率乘十九率自二至十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六層三率乘九率二三四五六七八九分之一多三率乘十一率自二至十一分之一少三率乘十三率自二至十三分又二三分之一多三率乘十五率自二至十五分又二三分之一少三率乘十七率自二至十七分又二三分之一多三率乘十九率自二至十九分又二三分之一少三率乘二十一率自二至二十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第七層三率乘十一率二三四五六七八九十一分之一多三率乘十三率自二至十三分之一少三率乘十五率自二至十五分之一多三率乘十七率自二至十七分之一少三率乘十九率自二至十九分之一多三率乘二十一率自二至二十一分之一少三率乘二十三率自二至二十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第八層三率乘十三率二三四五六七八九十一十三分之一多三率乘十五率自二至十五分之一少三率乘十七率自二至十七分之一多三率乘十九率自二至十九分之一少三率乘二十一率自二至二十一分之一多三率乘二十三率自二至二十三分之一少三率乘二十五率自二至二十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第九層三率乘十五率二三四五六七八九十一十三十五分之一多三率乘十七率自二至十七分之一少三率乘十九率自二至十九分之一多三率乘二十一率自二至二十一分之一少三率乘二十三率自二至二十三分之一多三率乘二十五率自二至二十五分之一少三率乘二十七率自二至二十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十層三率乘十七率二三四五六七八九十一十三十五十七分之一多三率乘十九率自二至十九分之一少三率乘二十一率自二至二十一分之一多三率乘二十三率自二至二十三分之一少三率乘二十五率自二至二十五分之一多三率乘二十七率自二至二十七分之一少三率乘二十九率自二至二十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十一層三率乘十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九分之一多三率乘二十一率自二至二十一分之一少三率乘二十三率自二至二十三分之一多三率乘二十五率自二至二十五分之一少三率乘二十七率自二至二十七分之一多三率乘二十九率自二至二十九分之一少三率乘三十一率自二至三十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十二層三率乘二十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一分之一多三率乘二十三率自二至二十三分之一少三率乘二十五率自二至二十五分之一多三率乘二十七率自二至二十七分之一少三率乘二十九率自二至二十九分之一多三率乘三十一率自二至三十一分之一少三率乘三十三率自二至三十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十三層三率乘二十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三分之一多三率乘二十五率自二至二十五分之一少三率乘二十七率自二至二十七分之一多三率乘二十九率自二至二十九分之一少三率乘三十一率自二至三十一分之一多三率乘三十三率自二至三十三分之一少三率乘三十五率自二至三十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十四層三率乘二十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五分之一多三率乘二十七率自二至二十七分之一少三率乘二十九率自二至二十九分之一多三率乘三十一率自二至三十一分之一少三率乘三十三率自二至三十三分之一多三率乘三十五率自二至三十五分之一少三率乘三十七率自二至三十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十五層三率乘二十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七分之一多三率乘二十九率自二至二十九分之一少三率乘三十一率自二至三十一分之一多三率乘三十三率自二至三十三分之一少三率乘三十五率自二至三十五分之一多三率乘三十七率自二至三十七分之一少三率乘三十九率自二至三十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十六層三率乘二十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九分之一多三率乘三十一率自二至三十一分之一少三率乘三十三率自二至三十三分之一多三率乘三十五率自二至三十五分之一少三率乘三十七率自二至三十七分之一多三率乘三十九率自二至三十九分之一少三率乘四十一率自二至四十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十七層三率乘三十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一分之一多三率乘三十三率自二至三十三分之一少三率乘三十五率自二至三十五分之一多三率乘三十七率自二至三十七分之一少三率乘三十九率自二至三十九分之一多三率乘四十一率自二至四十一分之一少三率乘四十三率自二至四十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十八層三率乘三十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三分之一多三率乘三十五率自二至三十五分之一少三率乘三十七率自二至三十七分之一多三率乘三十九率自二至三十九分之一少三率乘四十一率自二至四十一分之一多三率乘四十三率自二至四十三分之一少三率乘四十五率自二至四十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第十九層三率乘三十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五分之一多三率乘三十七率自二至三十七分之一少三率乘三十九率自二至三十九分之一多三率乘四十一率自二至四十一分之一少三率乘四十三率自二至四十三分之一多三率乘四十五率自二至四十五分之一少三率乘四十七率自二至四十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十層三率乘三十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七分之一多三率乘三十九率自二至三十九分之一少三率乘四十一率自二至四十一分之一多三率乘四十三率自二至四十三分之一少三率乘四十五率自二至四十五分之一多三率乘四十七率自二至四十七分之一少三率乘四十九率自二至四十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十一層三率乘三十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九分之一多三率乘四十一率自二至四十一分之一少三率乘四十三率自二至四十三分之一多三率乘四十五率自二至四十五分之一少三率乘四十七率自二至四十七分之一多三率乘四十九率自二至四十九分之一少三率乘五十一率自二至五十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十二層三率乘四十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一分之一多三率乘四十三率自二至四十三分之一少三率乘四十五率自二至四十五分之一多三率乘四十七率自二至四十七分之一少三率乘四十九率自二至四十九分之一多三率乘五十一率自二至五十一分之一少三率乘五十三率自二至五十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十三層三率乘四十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三分之一多三率乘四十五率自二至四十五分之一少三率乘四十七率自二至四十七分之一多三率乘四十九率自二至四十九分之一少三率乘五十一率自二至五十一分之一多三率乘五十三率自二至五十三分之一少三率乘五十五率自二至五十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十四層三率乘四十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五分之一多三率乘四十七率自二至四十七分之一少三率乘四十九率自二至四十九分之一多三率乘五十一率自二至五十一分之一少三率乘五十三率自二至五十三分之一多三率乘五十五率自二至五十五分之一少三率乘五十七率自二至五十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十五層三率乘四十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七分之一多三率乘四十九率自二至四十九分之一少三率乘五十一率自二至五十一分之一多三率乘五十三率自二至五十三分之一少三率乘五十五率自二至五十五分之一多三率乘五十七率自二至五十七分之一少三率乘五十九率自二至五十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十六層三率乘四十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九分之一多三率乘五十一率自二至五十一分之一少三率乘五十三率自二至五十三分之一多三率乘五十五率自二至五十五分之一少三率乘五十七率自二至五十七分之一多三率乘五十九率自二至五十九分之一少三率乘六十一率自二至六十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十七層三率乘五十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一分之一多三率乘五十三率自二至五十三分之一少三率乘五十五率自二至五十五分之一多三率乘五十七率自二至五十七分之一少三率乘五十九率自二至五十九分之一多三率乘六十一率自二至六十一分之一少三率乘六十三率自二至六十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十八層三率乘五十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三分之一多三率乘五十五率自二至五十五分之一少三率乘五十七率自二至五十七分之一多三率乘五十九率自二至五十九分之一少三率乘六十一率自二至六十一分之一多三率乘六十三率自二至六十三分之一少三率乘六十五率自二至六十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第二十九層三率乘五十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五分之一多三率乘五十七率自二至五十七分之一少三率乘五十九率自二至五十九分之一多三率乘六十一率自二至六十一分之一少三率乘六十三率自二至六十三分之一多三率乘六十五率自二至六十五分之一少三率乘六十七率自二至六十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十層三率乘五十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七分之一多三率乘五十九率自二至五十九分之一少三率乘六十一率自二至六十一分之一多三率乘六十三率自二至六十三分之一少三率乘六十五率自二至六十五分之一多三率乘六十七率自二至六十七分之一少三率乘六十九率自二至六十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十一層三率乘五十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九分之一多三率乘六十一率自二至六十一分之一少三率乘六十三率自二至六十三分之一多三率乘六十五率自二至六十五分之一少三率乘六十七率自二至六十七分之一多三率乘六十九率自二至六十九分之一少三率乘七十一率自二至七十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十二層三率乘六十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一分之一多三率乘六十三率自二至六十三分之一少三率乘六十五率自二至六十五分之一多三率乘六十七率自二至六十七分之一少三率乘六十九率自二至六十九分之一多三率乘七十一率自二至七十一分之一少三率乘七十三率自二至七十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十三層三率乘六十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三分之一多三率乘六十五率自二至六十五分之一少三率乘六十七率自二至六十七分之一多三率乘六十九率自二至六十九分之一少三率乘七十一率自二至七十一分之一多三率乘七十三率自二至七十三分之一少三率乘七十五率自二至七十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十四層三率乘六十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五分之一多三率乘六十七率自二至六十七分之一少三率乘六十九率自二至六十九分之一多三率乘七十一率自二至七十一分之一少三率乘七十三率自二至七十三分之一多三率乘七十五率自二至七十五分之一少三率乘七十七率自二至七十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十五層三率乘六十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七分之一多三率乘六十九率自二至六十九分之一少三率乘七十一率自二至七十一分之一多三率乘七十三率自二至七十三分之一少三率乘七十五率自二至七十五分之一多三率乘七十七率自二至七十七分之一少三率乘七十九率自二至七十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十六層三率乘六十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九分之一多三率乘七十一率自二至七十一分之一少三率乘七十三率自二至七十三分之一多三率乘七十五率自二至七十五分之一少三率乘七十七率自二至七十七分之一多三率乘七十九率自二至七十九分之一少三率乘八十一率自二至八十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十七層三率乘七十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一分之一多三率乘七十三率自二至七十三分之一少三率乘七十五率自二至七十五分之一多三率乘七十七率自二至七十七分之一少三率乘七十九率自二至七十九分之一多三率乘八十一率自二至八十一分之一少三率乘八十三率自二至八十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十八層三率乘七十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三分之一多三率乘七十五率自二至七十五分之一少三率乘七十七率自二至七十七分之一多三率乘七十九率自二至七十九分之一少三率乘八十一率自二至八十一分之一多三率乘八十三率自二至八十三分之一少三率乘八十五率自二至八十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第三十九層三率乘七十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五分之一多三率乘七十七率自二至七十七分之一少三率乘七十九率自二至七十九分之一多三率乘八十一率自二至八十一分之一少三率乘八十三率自二至八十三分之一多三率乘八十五率自二至八十五分之一少三率乘八十七率自二至八十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十層三率乘七十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七分之一多三率乘七十九率自二至七十九分之一少三率乘八十一率自二至八十一分之一多三率乘八十三率自二至八十三分之一少三率乘八十五率自二至八十五分之一多三率乘八十七率自二至八十七分之一少三率乘八十九率自二至八十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十一層三率乘七十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九分之一多三率乘八十一率自二至八十一分之一少三率乘八十三率自二至八十三分之一多三率乘八十五率自二至八十五分之一少三率乘八十七率自二至八十七分之一多三率乘八十九率自二至八十九分之一少三率乘九十一率自二至九十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十二層三率乘八十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一分之一多三率乘八十三率自二至八十三分之一少三率乘八十五率自二至八十五分之一多三率乘八十七率自二至八十七分之一少三率乘八十九率自二至八十九分之一多三率乘九十一率自二至九十一分之一少三率乘九十三率自二至九十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十三層三率乘八十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三分之一多三率乘八十五率自二至八十五分之一少三率乘八十七率自二至八十七分之一多三率乘八十九率自二至八十九分之一少三率乘九十一率自二至九十一分之一多三率乘九十三率自二至九十三分之一少三率乘九十五率自二至九十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十四層三率乘八十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五分之一多三率乘八十七率自二至八十七分之一少三率乘八十九率自二至八十九分之一多三率乘九十一率自二至九十一分之一少三率乘九十三率自二至九十三分之一多三率乘九十五率自二至九十五分之一少三率乘九十七率自二至九十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十五層三率乘八十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七分之一多三率乘八十九率自二至八十九分之一少三率乘九十一率自二至九十一分之一多三率乘九十三率自二至九十三分之一少三率乘九十五率自二至九十五分之一多三率乘九十七率自二至九十七分之一少三率乘九十九率自二至九十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十六層三率乘八十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九分之一多三率乘九十一率自二至九十一分之一少三率乘九十三率自二至九十三分之一多三率乘九十五率自二至九十五分之一少三率乘九十七率自二至九十七分之一多三率乘九十九率自二至九十九分之一少三率乘一百一率自二至一百一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十七層三率乘九十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一分之一多三率乘九十三率自二至九十三分之一少三率乘九十五率自二至九十五分之一多三率乘九十七率自二至九十七分之一少三率乘九十九率自二至九十九分之一多三率乘一百一率自二至一百一分之一少三率乘一百三率自二至一百三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十八層三率乘九十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三分之一多三率乘九十五率自二至九十五分之一少三率乘九十七率自二至九十七分之一多三率乘九十九率自二至九十九分之一少三率乘一百一率自二至一百一分之一多三率乘一百三率自二至一百三分之一少三率乘一百五率自二至一百五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第四十九層三率乘九十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五分之一多三率乘九十七率自二至九十七分之一少三率乘九十九率自二至九十九分之一多三率乘一百一率自二至一百一分之一少三率乘一百三率自二至一百三分之一多三率乘一百五率自二至一百五分之一少三率乘一百七率自二至一百七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十層三率乘九十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七分之一多三率乘九十九率自二至九十九分之一少三率乘一百一率自二至一百一分之一多三率乘一百三率自二至一百三分之一少三率乘一百五率自二至一百五分之一多三率乘一百七率自二至一百七分之一少三率乘一百九率自二至一百九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十一層三率乘九十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九分之一多三率乘一百一率自二至一百一分之一少三率乘一百三率自二至一百三分之一多三率乘一百五率自二至一百五分之一少三率乘一百七率自二至一百七分之一多三率乘一百九率自二至一百九分之一少三率乘一百一十一率自二至一百一十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十二層三率乘一百一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一分之一多三率乘一百三率自二至一百三分之一少三率乘一百五率自二至一百五分之一多三率乘一百七率自二至一百七分之一少三率乘一百九率自二至一百九分之一多三率乘一百一十一率自二至一百一十一分之一少三率乘一百一十三率自二至一百一十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十三層三率乘一百三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一分之一多三率乘一百五率自二至一百五分之一少三率乘一百七率自二至一百七分之一多三率乘一百九率自二至一百九分之一少三率乘一百一十一率自二至一百一十一分之一多三率乘一百一十三率自二至一百一十三分之一少三率乘一百一十五率自二至一百一十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十四層三率乘一百五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三分之一多三率乘一百七率自二至一百七分之一少三率乘一百九率自二至一百九分之一多三率乘一百一十一率自二至一百一十一分之一少三率乘一百一十三率自二至一百一十三分之一多三率乘一百一十五率自二至一百一十五分之一少三率乘一百一十七率自二至一百一十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十五層三率乘一百七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五分之一多三率乘一百九率自二至一百九分之一少三率乘一百一十一率自二至一百一十一分之一多三率乘一百一十三率自二至一百一十三分之一少三率乘一百一十五率自二至一百一十五分之一多三率乘一百一十七率自二至一百一十七分之一少三率乘一百一十九率自二至一百一十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十六層三率乘一百九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七分之一多三率乘一百一十一率自二至一百一十一分之一少三率乘一百一十三率自二至一百一十三分之一多三率乘一百一十五率自二至一百一十五分之一少三率乘一百一十七率自二至一百一十七分之一多三率乘一百一十九率自二至一百一十九分之一少三率乘一百二十一率自二至一百二十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十七層三率乘一百一十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九分之一多三率乘一百一十三率自二至一百一十三分之一少三率乘一百一十五率自二至一百一十五分之一多三率乘一百一十七率自二至一百一十七分之一少三率乘一百一十九率自二至一百一十九分之一多三率乘一百二十一率自二至一百二十一分之一少三率乘一百二十三率自二至一百二十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十八層三率乘一百一十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一分之一多三率乘一百一十五率自二至一百一十五分之一少三率乘一百一十七率自二至一百一十七分之一多三率乘一百一十九率自二至一百一十九分之一少三率乘一百二十一率自二至一百二十一分之一多三率乘一百二十三率自二至一百二十三分之一少三率乘一百二十五率自二至一百二十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第五十九層三率乘一百一十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三分之一多三率乘一百一十七率自二至一百一十七分之一少三率乘一百一十九率自二至一百一十九分之一多三率乘一百二十一率自二至一百二十一分之一少三率乘一百二十三率自二至一百二十三分之一多三率乘一百二十五率自二至一百二十五分之一少三率乘一百二十七率自二至一百二十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十層三率乘一百一十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三一百一十五分之一多三率乘一百一十九率自二至一百一十九分之一少三率乘一百二十一率自二至一百二十一分之一多三率乘一百二十三率自二至一百二十三分之一少三率乘一百二十五率自二至一百二十五分之一多三率乘一百二十七率自二至一百二十七分之一少三率乘一百二十九率自二至一百二十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十一層三率乘一百一十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三一百一十五一百一十七分之一多三率乘一百二十一率自二至一百二十一分之一少三率乘一百二十三率自二至一百二十三分之一多三率乘一百二十五率自二至一百二十五分之一少三率乘一百二十七率自二至一百二十七分之一多三率乘一百二十九率自二至一百二十九分之一少三率乘一百三十一率自二至一百三十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十二層三率乘一百二十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三一百一十五一百一十七一百一十九分之一多三率乘一百二十三率自二至一百二十三分之一少三率乘一百二十五率自二至一百二十五分之一多三率乘一百二十七率自二至一百二十七分之一少三率乘一百二十九率自二至一百二十九分之一多三率乘一百三十一率自二至一百三十一分之一少三率乘一百三十三率自二至一百三十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十三層三率乘一百二十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三一百一十五一百一十七一百一十九一百二十一分之一多三率乘一百二十五率自二至一百二十五分之一少三率乘一百二十七率自二至一百二十七分之一多三率乘一百二十九率自二至一百二十九分之一少三率乘一百三十一率自二至一百三十一分之一多三率乘一百三十三率自二至一百三十三分之一少三率乘一百三十五率自二至一百三十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十四層三率乘一百二十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三一百一十五一百一十七一百一十九一百二十一一百二十三分之一多三率乘一百二十七率自二至一百二十七分之一少三率乘一百二十九率自二至一百二十九分之一多三率乘一百三十一率自二至一百三十一分之一少三率乘一百三十三率自二至一百三十三分之一多三率乘一百三十五率自二至一百三十五分之一少三率乘一百三十七率自二至一百三十七分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十五層三率乘一百二十七率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三一百一十五一百一十七一百一十九一百二十一一百二十三一百二十五分之一多三率乘一百二十九率自二至一百二十九分之一少三率乘一百三十一率自二至一百三十一分之一多三率乘一百三十三率自二至一百三十三分之一少三率乘一百三十五率自二至一百三十五分之一多三率乘一百三十七率自二至一百三十七分之一少三率乘一百三十九率自二至一百三十九分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十六層三率乘一百二十九率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三一百一十五一百一十七一百一十九一百二十一一百二十三一百二十五一百二十七分之一多三率乘一百三十一率自二至一百三十一分之一少三率乘一百三十三率自二至一百三十三分之一多三率乘一百三十五率自二至一百三十五分之一少三率乘一百三十七率自二至一百三十七分之一多三率乘一百三十九率自二至一百三十九分之一少三率乘一百四十一率自二至一百四十一分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十七層三率乘一百三十一率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三一百一十五一百一十七一百一十九一百二十一一百二十三一百二十五一百二十七一百二十九分之一多三率乘一百三十三率自二至一百三十三分之一少三率乘一百三十五率自二至一百三十五分之一多三率乘一百三十七率自二至一百三十七分之一少三率乘一百三十九率自二至一百三十九分之一多三率乘一百四十一率自二至一百四十一分之一少三率乘一百四十三率自二至一百四十三分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十八層三率乘一百三十三率二三四五六七八九十一十三十五十七十九二十一二十三二十五二十七二十九三十一三十三三十五三十七三十九四十一四十三四十五四十七四十九五十一五十三五十五五十七五十九六十一六十三六十五六十七六十九七十一七十三七十五七十七七十九八十一八十三八十五八十七八十九九十一九十三九十五九十七九十九一百一一百一一百三一百五一百七一百九一百一十一一百一十三一百一十五一百一十七一百一十九一百二十一一百二十三一百二十五一百二十七一百二十九一百三十一分之一多三率乘一百三十五率自二至一百三十五分之一少三率乘一百三十七率自二至一百三十七分之一多三率乘一百三十九率自二至一百三十九分之一少三率乘一百四十一率自二至一百四十一分之一多三率乘一百四十三率自二至一百四十三分之一少三率乘一百四十五率自二至一百四十五分之一爲初商乘法式以減初商實所得如第六十九層三率乘一百三十五率二三四五六七八九十一十三十五十七十

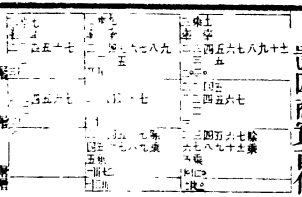


率原實分母係二三四五分又三分乘法式係二三分又二三分應以二三除之四五乘之又三乘之以同其母其三率乘七率原實分母係自二至七分又二三分乘法式係二三四五分又二三分應以二三除之六七乘之又三乘之其三率乘九率原實係自二至九分又二三分又五分乘法式係自二至七分又二三分應以二三除之八九乘之又三乘之五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又二三分又五分乘法式係自二至九分又二三分應以二三除之十與十一乘之又三乘之五乘之通計乘除得如第六層少三率乘五率二三四五分又三分之十多二率乘七率自二至七分又三分之二十一少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一百八十多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二百七十五爲次商同母式以減原實其減餘如第七層二三四五分又三分之七少三率乘七率自二至七分又三分又五分之十八多三率乘九率自二至九分又三分又五分之一百六十五



少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二百六十爲三商實

置三商實首位三率乘五率二三四五分又三分之七以除法首位三率一約之得五率二三四五分又三分之七卽爲三商以乘除法所得如第八層三率乘五率二三四五分又三分之七少三率乘七率二三分又二三四五分又三分之七多三率乘九率二三四五分又二三四五分又三分之七少三率乘十一率自二至七分又二三四五分又三分之七爲三商乘法式應減三商實其首位三率乘五率二三四五分又三分之七減盡其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係二三分又二三四五分又三分應以二三四五除之四五六七乘之以同其母其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係二三四五分又三分應以二三四五除之六七八九乘之又五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五



分乘法式係自二至七分又二三四五分又三分應以二三四五除之八九十十一乘之又五乘之通計乘除得如第九層少三率乘七率自二至七分又三分之四十九多三率乘九率自二至九分又三分又五分之八百八十二少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二千三百一十為三商同母式以減三商實所得如第十層三率乘七率自二至七分又三分之三十一少三率乘九率自二至九分又三分又五分之七百十七多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二千〇五十為四商實

置四商實首位三率乘七率自二至七分又三分之三十一約之得七率自二至七分又三分之三十一以除法首位三率一少三率乘九率一三分又自二至七分又三分之三十一多三率乘十一率二三四五分又自二至七分又三分之三十一為四商乘法式應減四商實其首位三率乘七率自二至七分又三分之三十一減盡其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式分母係二三分又自二至七分又三分應以自二至七除之百四至九乘之又五乘之以同其母其三率乘十一率原實分母係自二至十一分乘法式係二三四五分又自二至七分又三分應以自二至七除之自六至十一乘之又五乘之通計乘除得如第十二層少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一千八百六十多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一萬〇二百二十為四商同母式以減四商實其減餘如第十三層三率乘九率自二至九分又三分又五分之一千一百四十三少三率乘十一率自一至十一分又三分又五分之八千一百八十為五商實

置五商實首位三率乘九率自二至九分又三分又五分之一千一百四十三以除法首位三率一約之得九率自二至九分又三分又五分之一千一百四十三即為五商以乘除法所得如第十四層三率乘九率自二至九分又三分又

五分之一千一百四十三少三率乘十一率一三分又自二至九分又三分又五分之一千一百四十三爲五商乘法式應減五商實其首位三率乘九率自二至九分又三分又五分之一千一百四十三減盡其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係二三分又自二至九分又三分又五分應以自二至九除之自四至十一乘之以同其母計乘除得如第十五層少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二萬〇九百五十五爲五商同母式以減五商實其減餘第十六層三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一萬二千七百七十五爲六商

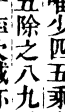
實

置六商實以除法首位三率一約之得十一率自一至十一分又三分又五分之一萬二千七百七十五以減原實却盡通計求得餘弧求割綫各率分數爲一率一又三率二三分之一又五率二三四五分又三分之七又七率自二至七分又三分之三十一又九率自二至九分又五分之一千一百四十三又十一率自二至十一分又三分又五分之一萬二千七百七十五也

細審餘弧求割線率分其分母與餘弧求切線同是其逐率除法亦必與餘弧求切線同于自審其各率分子之由來乃由前圖爲第二圖其次商實分子之五率七率均爲一三相乘之三九率十一率均爲一三五連乘之十五是諸數之根係以奇數疊乘而間一位則加一乘也其初減數則起單一五率初減用二三除四五乘又三乘七率初減二三除六七乘又三乘是以五率初減六七乘之四五除之即七率初減也九率初減亦二三除而用八九乘又三乘又五乘是以七率初減八九乘之六七除之又五乘之即九率初減也十一率初減亦二三除而用十與十一乘又三乘又五乘是以九率初減十與

本數　次數　初減數　次減數　三減數　四減數　五　四　三　二　一

十一乘之八九除之卽十一率初減也而第一減餘卽爲五率分子其次減數皆根于五率分子之七七率次減二三四五除四五六七乘而四五乘除可相抵是二三四五除而用六七八九乘又五乘以較七率次減其除法同唯少四五乘多八九乘又五乘是以七率次減四五除之八九乘之又五乘之卽九率次減也其十一率次減亦二三四五除而用八九十一乘又五乘以較九率次減其除法并又五乘並同唯多十與十一乘少六七乘是以九率次減六七除之十與十一乘之卽十一率次減也而第一減餘卽七率分子其三減數皆根于七率分子之三十一九率三減二三四五六七除四五六七八九乘又五乘而四五六七乘除可相抵是二三除八九乘又五乘也其十一率三減亦二三四五六七除而用六七八九十十一乘又五乘以較九率三減少四五乘是以九率三減四五除之十與十一乘之卽十一率三減也而第一減餘卽爲九率分子其四減數皆根于九率分子之一千一百四十三十一率四減二三四五六七八九除四五六七八九十十一乘而四五六七八九乘除可相抵是二三除十與十一乘也而減餘一萬二千七百七十五卽爲十一率分子



復由前圖變爲第三圖首層爲次商實卽數根係初減數而應減之數皆間一位添一奇數乘而首位卽三率分子第二層初減數以三率分子爲實二三除四五乘又三乘爲第一初減再加四五除六七乘爲第二初減再加八九除十與十一乘爲第四初減通計其除法則自二三而遞加其乘法則自四五而遞加而又間位加一奇數乘第三層減餘首位五率分子卽第一乘法第四層次減數以第二乘法爲實二三除六七乘爲第一次減再加四五除八九乘又五乘爲第二次減再加六七除十與十一乘爲第三次減通計其除法亦自二三而遞加其乘法則自六七而遞加而間位亦添一奇數乘第五層首位七率分子卽第二乘法第六層爲三減數以第二乘法爲實二三除八九乘又五乘爲第一三減再

加四五除十與十一乘爲第二三減通計其除法亦自二三而遞加其乘法則自八九而遞加而間位亦加一奇數乘第七層減餘首位九率分子卽第三乘法第八層四減數以第三乘法爲實二三除十與十一乘爲第一四減其除法亦起二三而乘法起十與十一雖圖止十一率而遞加之例可類推也細案初二三四各減數其迭次乘除與間位乘法皆遞加而不紊則十一率以後亦可盡知惟逐率自爲分子與餘弧求切綫同故亦先求用數此餘弧求割綫立術之由也

弧背求割綫算式

本弧求割綫降位較難餘弧求割綫降位較易大畧與弧背求切綫同茲亦將象限九十度分爲兩限其自十秒至三十度則用本弧求割綫法求之自三十度至八十九度五十九分五十秒則用餘弧求割綫法求之庶極多亦不過十數而降位無難矣

本弧求割綫各率乘法表

五率	第一乘法	五
七率	第二乘法	六一
九率	第三乘法	二三八五
十一率	第四乘法	五五三一
十三率	第五乘法	二七〇二七六五
十五率	第六乘法	一九九三五一〇〇〇
十七率	第七乘法	一九三九一五〇〇〇〇
九率	第八乘法	二四〇四九〇〇〇〇〇〇

餘弧求割綫各率乘法表

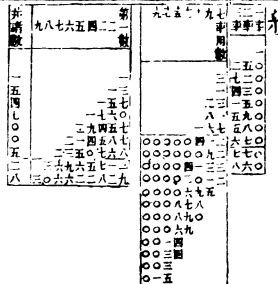
五率	第一乘法	七
七率	第二乘法	三
九率	第三乘法	二四三
七率	第四乘法	二七五
三率	第五乘法	一四四七七
五率	第六乘法	三〇〇九〇〇
七率	第七乘法	七四六八〇〇〇〇
九率	第八乘法	三五七四〇〇〇〇〇〇

本弧求割綫第六乘法係一九九三六〇九八一第七乘法係一九三九一五一二一四五第八乘法係二四〇四八七九六七五四四一餘弧求割綫第六乘法係三〇一〇一九二五第七乘法係七四六六六四九〇五七第八乘法係三五八七三六一二〇〇六五以尾數無用故但以〇存其位數

凡設度自十秒至三十度則用本弧求割綫法求之今將設弧三十度以本弧求割綫算式列于後

法檢弧綫表得三十度弧分五二三五九八七七六命爲二率以半徑爲一率二率自乘一率除之得三率二七四一五五六七八二除之得一三七〇七七八三九爲第一數　次置第一數以三率乘之一率除之得五率三除之四除之得三一三一七二二三二爲七率用數第一乘法五乘之得一五六五八六一二爲第二數　次置七率用數以三率乘之一率除之得七率五除之六除之得二八六一九三一五爲九率用數第二乘法六一乘之得一七四五七七八爲第三數　次置九率用數以三率乘之一率除之得九率七除之八除之得一四〇一〇九八〇爲十一率用數第三乘法一三八五乘之得一九四〇五二爲第四數　次置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九除之十除之得〇〇四二六七九九爲十三率用數第四乘法五〇五二一乘之得二一五六二爲第五數　次置十三率用數以三率乘之一率除之得十三率十一除之十二除之得〇〇〇〇八八六四四爲十五率用數第五乘法二七〇二七六五乘之得二三九六爲第六數　次置十五率用數以三率乘之一率除之得十五率十三除之十四除之得〇〇〇〇〇〇〇一三三五爲十七率用數第六乘法一九九三六一〇〇〇乘之得二六六爲第七數　次置十七率用數以三率乘

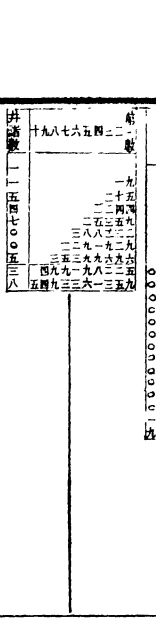
之一率除之得十七率十五除之十六除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇一五二五爲十九率用數第七乘法一九三九一五〇〇〇〇〇乘之得三〇爲第八數　次置十九率用數以三率乘之一率除之得十九率十七除之十八除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇一四第八乘法二四〇四九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇乘之得〇三爲第九數　以諸數相併得一五四七〇〇五三八爲割綫半徑差加半徑小餘棄之得一一五四七〇〇五爲所求三十度割綫



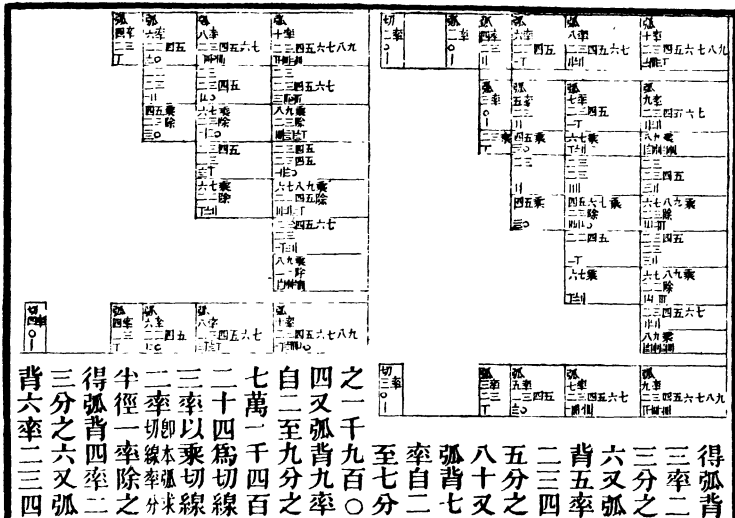
凡設度自二十度至八十九度五十九分五十秒則用餘弧求割綫法求之今將設弧三十度以餘弧求割綫算式列于後

法以半徑爲二率以三十度減象限得六十度爲餘弧檢弧線表得餘弧弧分一〇四七一九七五五一爲三率二率自乘三率除之得一率九五四九二九六五九爲第一數　次置三率弧分二除之三除之得一七四五三二九二五爲第二數　次以三率自乘二率除之得四率一〇九六六二二七一一於是三除第二數以四率乘之二率除之得五率四除之五除之得三一八九九四六一六爲七率用數第一乘法七乘之得二二三二九六二三爲第三數　次置七率用數以四率乘之二率除之得七率六除之七除之得八三二八九七〇一爲九率用數第二乘法三一乘之得二五八一九八一爲第四數　五除九率用數以四率乘之二率除之得九率八除之九除之得二五三七一四九爲十一率用數第三乘法一一四三乘之得二八九九九六爲第五數　次置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十除之十一除之得〇二五二九三六爲十三率用數第四乘法一二七五乘之得三二三一三爲第六數　七除十三率用數以四率乘之二率除之得十三率十二除之十三除之得〇〇〇〇一五四〇一爲十五率用數第五乘法一四一四七七乘之得三五九三爲第七數　次置十五率用數以四率乘之二率除之得十五率十四除之十五除之得

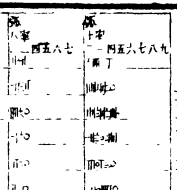
○○○一三二六爲十七率用數第六乘法三○一
○一九○○乘之得三九九爲第八數　九除十
七率用數以四率乘之二率除之得十七率十六除
之十七除之得○○○○○○○○五九四爲
十九率用數第七乘法七四六六○○○○○乘
之得四四爲第九數　次置十九率用數以四率乘
之二率除之得十九率十八除之十九除之得○○
○○○○○○○○一九第八乘法二五八七
四○○○○○○○乘之得○五爲第十數　以諸
數相併得一一五四七○○五三八小餘未滿五棄
之卽三十度割綫



外切密率　卷之三
　切綫求本弧
術曰分子均爲單一無乘法　以切線爲第一數正
　次以半徑爲一率切綫爲二率二率自乘一率除
之得三率乃以三率乘第一數一率除之得四率三
除之爲第二數負　置四率以三率乘之一率除之
得六率五除之爲第三數正　置六率以三率乘之
一率除之得八率七除之爲第四數負　置八率以
三率乘之一率除之得十率九除之爲第五數正
如是遞求至單位下乃并諸正數又并諸負數減之
得本弧
　解曰凡連比例率分可以還原有本弧求切線率
分卽可得切線求本弧率分其法以本弧求切線
率分卽命爲切線二率累次乘除遞求各率復加
減本弧求切線率分使俾留首位弧背二率然後
視其所加減者何若卽得切線求本弧率分此還
原法也
　置本弧求切線率分弧背二率一又弧背四率二
三分之二又弧背六率二三四五分之十六又弧
背八率自二至七分之二百七十二又弧背十率
自二至九分之七千九百三十六命爲切線便爲
二率自乘半徑爲一率除之使從四率以下分母



得弧背三率二三分之六又弧背五率二三四五分之八十又弧背七率自二至七分之一千九百〇四又弧背九率自二至九分之七萬一千四百二十四爲切線二率以乘切線三率以乘切線二率（即本弧半分切線率）半徑一率除之得弧背四率二三分之六又弧背六率二三四五分之一百二十又弧背八率自二至九分之三千六百九十六又弧背十率自二至九分之四萬六千一百二十爲切線六率又以切線三率乘之半徑一率除之使從八率以下分母得弧背八率自二至九分之五千〇四十又弧背十率自二至九分之八十四萬六千七百二十爲切線八率又以切線三率乘之半徑一率除之使從十率分母得弧背十率自二至九分之三十六萬二千八百八十爲切線十率



乃以切線二率內之弧背四率分子二約切線四率內之弧背四率分子六得三卽以三除切線四率得弧背四率二三分之二又弧背六率二三四五分之四十又弧背八率自二至七分之一千二百三十二又弧背十率自二至九分之五萬六千三百二十爲切線四率二分之一以減切線二率得弧背二率一少弧背六率二三四五分之二十四少弧背八率自二至七分之九百六十少弧背十率自二至九分之四萬八千二百八十四爲減得數此減得數與切線二率一少切線四率三分之一相等乃取減得數內之弧背六率分子二十四以約切線六率內之弧背六率分子一百二十得五卽以五除切線六率得弧背六率二四五分之二十四又弧背八率自二至七分之一千六百八十又弧背十率自二至九分之十二萬九千〇二十四以加前減得數得弧背二率一又弧背八率自二至七分之七百二十爲加得數此加得數與切線二率一少切線四率三分之一多切線六率五分之一相等乃取加得數內之弧背八率分子七百二十以約切線八率內之弧背八率分子五千〇四十得七卽以七除切線八率得弧背八率自二至七分之七百二十又弧背十率自二至九分之十二萬〇九百六十爲切線八率七分之一以減加得數得弧背二率一少弧背十率自二至九分之四萬〇三百二十爲第二減得數此減得數與切線二率一少切線四率三分之一多切線六率五分之一少切線八率七分之一相等乃取減得數內之弧背十率分子四萬〇三百二十以約切線十率內之弧背十率分子一千六百八十得九卽以九除十率得弧背十率自二至九分之四萬〇三百二十爲切線十率九分之一以加第二減得數于是本弧求切線半分百四率以下加減却盡惟餘弧背一率與切線二率一少切線四率三分之

一多切線六率五分之一少切線八率七分之一多切線十率九分之一相等是卽切線求本弧各率分數也

細審切線求本弧各率分子均爲單一故不必求遞次乘法而其分母爲一三五七九各奇數則可悟十率以後之分母亦必爲各奇數挨次遞加惟逐率各自爲分母非可由遞除而得故先求各率全數而各以本率分母除之此切線求本弧立法之由也

切線求餘弧

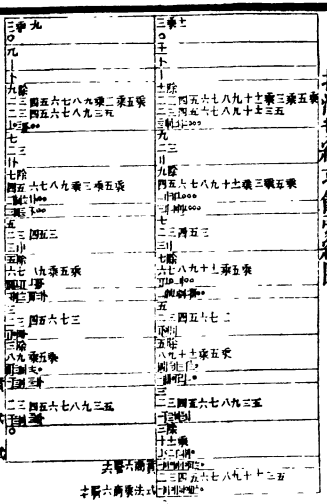
術曰先求各率分子爲遞次乘法　置單一以二三遞乘之又一乘三除得二爲數根又爲第一乘法　三乘前數根以四五遞乘之又三乘五除得七十二爲數根三乘前乘法以四五遞乘之又一乘三除得四十爲初減數數根內減初減得三十二爲第二乘法　置前數根以六七遞乘之又五乘七除得二千一百六十爲數根置前初減以六七遞乘之又三乘五除得一千〇〇八爲初減數置前乘法以六七遞乘之又一乘三除得四百四十八爲次減數數根內減初減得一千一百五十二再減次減得七百〇四爲第三乘法　五乘前數根以八九遞乘之又七乘九除得六十萬四千八百爲數根五乘前初減以八九遞乘之又五乘七除得二十五萬九千二百爲初減數五乘前次減以八九遞乘之又三乘五除得九萬六千七百六十八爲次減數五乘前乘法以八九遞乘之又一乘三除得八萬四千四百八十爲三減數數根內減初減得三十四萬五千六百再減次減得二十四萬八千八百三十二再減三減得十六萬四千三百五十二爲第四乘法　置前數根以十與十一乘之又九乘十一除得五千四百四十三萬二千爲數根置前初減以十與十一遞乘之又七乘九

除得二千二百十七萬六千爲初減數置前次減以十與十一遞乘之又五乘七除得七百六十萬三千二百爲次減數置前三減以十與十一遞乘之又三乘五除得五百五十七萬五千六百八十爲三減數置前乘法以十與十一遞乘之又一乘三除得六百〇二萬六千二百四十爲四減數數根內減初減得三千二百二十五萬六千再減次減得二千四百六十五萬二千八百再減三減得一千九百〇七萬七千一百二十再減四減得一千三百〇五萬〇八百八十爲第五乘法　凡求數根及各減數先用耦奇二數乘而逐次乘法遞加（如第一乘法用二三乘次用相連兩奇數一乘一除而逐次減數遞降（如第二乘法用四五乘數根用二乘五除切減用一乘三除）又間位加一奇數乘如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

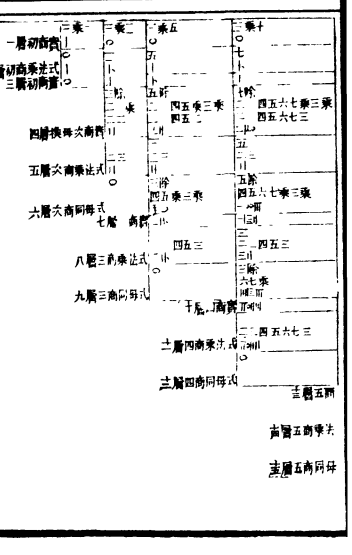
乃以切線爲第一數正　次以切線爲一率半徑爲二率二率自乘一率除之得三率二三遞除之爲五率用數第一乘法乘之得第二數正　次以三率自乘二率除之得四率于是三除五率用數以四率乘之二率除之得五率四五遞除之爲七率用數第二乘法乘之得第三數負　置七率用數以四率乘之二率除之得七率六七遞除之爲九率用數第三乘法乘之得第四數正　五除九率用數以四率乘之二率除之得九率八九遞除之爲十一率用數第四乘法乘之得第五數負　置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十一遞除之爲十三率用數第五乘法乘之爲第六數正　凡逐次除法同餘弧求切線第一數爲正第二數以下耦數正奇數負如是遞求至單位下乃并諸正數又并諸負數減之所得爲以半徑爲二率餘弧弧分爲三率之第一率以半徑自乘求得數除之得餘弧

解曰切線求餘弧若依切線求本弧還原之法當以切線爲一率半徑爲二率取餘弧求切線率分命爲一率以二率半徑自乘切線一率除之得切線三率以切線三率自乘二率半徑除之得切線四率于是置切線三率以切線四率乘之半徑二率除之得切線五率如是依次遞求切線各率就切線一率分子累加累減使之却盡僅留首位視其加減分數即切線求餘弧率分其第一數起一率之切線以下均用奇率而餘弧求切線率分所留之首位係以半徑爲二率弧背爲三率之一率故遞求所得亦爲弧背爲三率之一率但其各率分子由累次乘除累次加減而成紛紜雜揉而莫見其遞求之例故此有其法而不適于用夫餘弧之切線與半徑與本弧之切線爲三率連比例則

試以半徑爲一率自乘爲實切線求本弧率分各降一率除之其所得之第一數亦起一率之切線而各率率分與還原所得並同且切線求本弧所得爲弧背今既用以除半徑二率自乘數則所得亦爲弧背爲三率半徑爲二率之一率而率分既由一次除法而得則遞求分子之由來乃顯然而可見故用以代還原之法也今依法演得降率切線求本弧各率分數爲三率一少五率三分之一多七率五分之一少九率七分之一多十一率九分之一少十三率十一分之一卽切線求餘弧之除法也

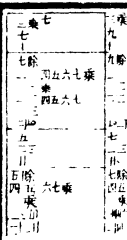


推演切線求餘弧總圖

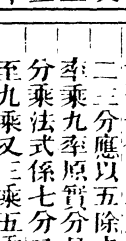


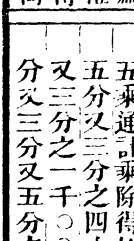
如圖先置二率半徑自乘所得如首層三率乘一率一爲初商實以切線求本弧率分爲法除之以除法首位約初商實得一率一卽爲初商以乘除法所得如二層三率乘一率一少三率乘三率三分之一多三率乘五率五分之一少三率乘七率七分之一多三率乘九率九分之一少三率乘十一率十一分之一以減初商實得三層二率乘三率三分之一少三率乘五率五分之一多三率乘七率七分之一少三率乘九率九分之一多三率乘十一率十一分之一爲次商實

次商實應換分母何也切線求本弧率分分母太小次商以下其分子多不受除必須與餘弧求切線分母相同則分子方無畸零其三率乘三率應以餘弧求切線分母二三乘之以切線求本弧分母三除之其三率乘五率應以餘弧求切線分母二三四五乘之又三乘之以切線求本弧分母五除之其三率乘七率應以自二至七乘之又三乘之又以七除之其三率乘九率應以自二至九乘之又三乘五乘之又以九除之其三率乘十一率應以自二至十一乘之又三乘五乘之又以十一除之通計求得如四層三率乘三率二三分之二少三率乘五率二三四五分又三分之七十二多三率乘七率自二至七分又三分之二千一百六十少三率乘九率自二至九分又三分又五分之六十萬〇四千八百多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之五千四百四十三萬二千爲換母次商實　置首位以除法首位三率一約之得三率二三分之二即爲次商

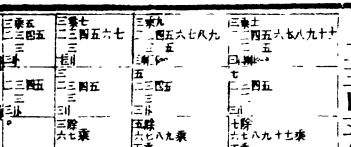


以乘除法得五層三率乘三率二三分之二少三率乘五率三分又二三分之二多三率乘七率五分又二三分之二少三率乘九率七分又二三分之二多三率乘十一率九分又二三分之二爲次商乘法式應減次商實其三率乘三率二三分之二滅盡其三率乘五率原實分母係二三四五分又三分乘法式分母係二三分又二三分應以三除之又四五乘又三乘以同其母（明按此除字乘字本可省算而其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係五分又二三分應以五除之又四五六七乘又三乘其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係七分又二三分應以七除之又自四至九乘又三乘五乘其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係九分又二三分應以九除之又自四至十一乘又三乘五乘通計乘除得如六層少三率乘五率二三四五分又三分之四十多三率乘七率自二至七分又三分之一千〇〇八少三率乘九率自二至九分又三分又五分之二十五萬九千二百多三率



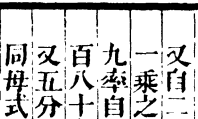


乘十一率自二至十一分又三分又五分之二千一百十七萬六千爲次商同母式以減次商實得七層少三率乘五率二三四五分又三分之三十二多三率乘七率自二至七分又三分之一千一百五十二少三率乘九率自二至九分又三分又五分之三十四萬五千六百多三率乘十三率自二至十一分又三分又五分之二千二百二十五萬六千爲三商實

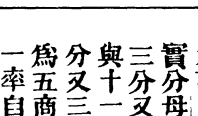


置三商實首位少三率乘五率二三四五分又三分之三十二以除法首位三率一約之得少五率二三四五分又三分之三十二卽爲三商以乘除法得八層少三率乘五率二三四五分又三分之三十二多三率乘七率三分又二三四五分又三分之三十二少三率乘九率五分又二三四五分又三分之三十二多三率乘十一率七分又二三四五分又三分之三十二爲三商乘法應減三商實其首位三率乘五率二三四五分又三分之三十二盡其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係三分又二三四五分又三分應以三除之以六七乘之以同其母其三率乘九率原實分母係自二分至九分又三分又五分乘法式係五分又二三四五分又三分應以五除之又六七八九乘之又五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係七分又二三四五分又三分應以七除之又自六至十一乘之又五乘之通計乘除得如第九層三率乘七率自二至七分又三分之四百四十八少三率乘九率自二至九分又三分又五分之九萬六千七百六十八多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之七百六十萬〇三千二百爲二商同母式以減三商實得十層三率乘七率自二至七分又三分之七百〇四少三率乘九率自二至九分又三分又五分之二十四萬八千八百三十二多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之二千四百六十五萬一千八百爲四商實

置四商實首位三率乘七率自二至七分又三分之七百〇四以除法首位三率一約之得七率自二至七分又三分之七百〇四卽爲四商以乘除法得十一層三率乘七率自二至七分又三分之七百〇四少三率乘九率三分又自二至七分又

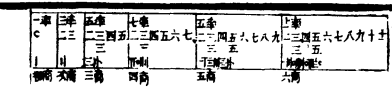


三分之七百〇四多三率乘十一率五分又自二分至七分又三分之七百〇四爲四商乘法式應減四商實其首位三率乘七率自二至七分又三分之七百〇四減盡其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係三分又自二至七分又三分應以三除之又八九乘之又五乘之以同其母其三率乘十一原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係五分又自二至七分又三分應以五除之又八九十十一乘之又五乘之通計乘除得十二層少三率乘九率自二至九分又三分又五分之八萬四千四百八十多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之五百五十七萬五千六百八十爲四商同母式以減四商實得十三層少三率乘九率自二至九分又三分又五分之十六萬四千三百五十二多三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之十六萬四千三百五十二爲五商乘法式應減五商實其首位三率乘九率自二至九分又三分又五分之十六萬四千三百五十二減盡其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法係三分又自二至九分又三分又五分應以三除十與十一乘得十五層三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之六百〇二萬六千二百四十爲五商同母式以減五商實得十六層三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一千三百〇五萬〇八百八十爲六商實



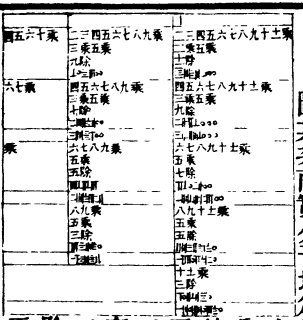
置六商實以除法首位三率一約之得十一率自二至十一分又三分又五分之一千三百〇五萬〇八百八十郎爲六商以乘除法得十七層三率乘十一率自二至

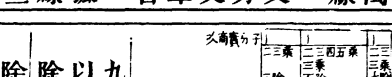
置五商實首位少三率乘九率自二至九分又三



十一分又三分又五分之一千三百〇五萬〇八百八十以減六商實卻盡通計得切線求餘弧爲三率之一率各率分數爲一率一又三率二三分之二少五率二三四五分又三分之三十二多七率自二至七分又三分之七百〇四少九率自二至九分又三分又五分之十六萬四千三百五十二多十一率自二至十一分又三分又五分之一千三百〇五萬〇八百八十也

細審切線求餘弧各率分數其分母與餘弧求切線同是其逐率除法亦與餘弧求切線同于是審其分子之由來乃由前圖爲第二圖其次商實分子均爲單一其數根換分母之乘除則三率分子爲二三乘又三除即第一數根其五率分子爲二三四五乘又三乘又五除以較三率分子多四五乘又三乘又多五除少三除是以第一數根四五乘之又三乘之又



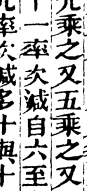


三乘五除即第二數根也七率分子爲自二至七乘又三乘又五乘又多九除少七除以較五率分子多六七乘又多七除少五除是以第二數根六七乘之又五乘七除即第三數根也

九率分子爲自二至九乘又三乘又五乘又九除以較七率分子多八九乘又五乘又多九除少七除是以第三數根八九乘之又五乘之又七乘九除即第四數根也十一率分子爲自二至十一乘又三乘又五乘又十一除以較九率分子多十與十一乘又多十一除少九除是以第四數根十與十一乘之又九乘十一除即第五數根也而第一數根即爲三率分子其初減數皆根子三率分子之二五率初減四五乘又三乘又三除七率初減四五六七乘又三乘又五除以較五率初減多六七乘又多五除少三除是以五率初減六七乘之又三乘五除即七率初減也其九率初減自四至九乘又三乘又五乘又七除以較七率初減多八九乘又五乘又多七除少五除是以七率初減八

九乘之又五乘之又五乘七除即九率初減也十一率初減自四至十一乘又三乘又五乘又九除以較九率初減多十與十一乘又多九除少七除是以九率初減十與十一乘之又七乘九除即十一率初減也而第一減餘即爲五率分子其次減數皆根于五率分子之三十二七率次減六七乘又三除九率次減六七八九乘又五乘又五除以較七率次減多八九乘又五乘又多五除少三除是以七率次減八九乘之又五乘之又三乘五除即九率次減也其十一率次減自六至十一乘又五乘又七除以較九率次減多十與十一乘又多七除少五除是以九率次減十與十一乘之又五乘七除即十一率次減也而第一減餘即爲七率分子其三減數皆根于七率分子之七百〇四九率三減八九乘又五乘又三除十一率三減八九十十一乘又五乘又五除以較九率三減多十與十一乘又多五除少三除是以九率三減十與十一乘之又三乘五除即十一率三減也而第一減餘即爲九率分子其四減數根于九率分子之十六萬四千三百五十二十一率四減十與十一乘又三除而減餘一千三百〇五萬八百八十即十一率分子

復由前圖爲第三圖第一層爲換母次商實分子即數根置單一以二三乘又一乘三除（前圖本無今加）



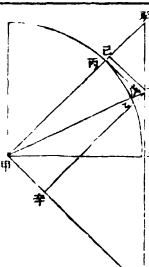
乘則遞推爲第一之例益顯）爲第一數根再加四五乘又三乘五除又三乘爲第二數根再加六七乘又五乘七除爲第三數根再加八九乘又七乘九除又五乘爲第四數根再加十與十一乘又九乘十一除爲第五數根通計其乘法自二三而遞加又相連兩奇數一乘一除而間位加一奇數乘其首位二爲三率分子即第一乘法第二層初減數以三率分子爲實四五乘又一乘三除又三乘爲第一初減再加六七乘又三乘五除爲第二初減再加八九乘又五乘七除又五乘爲第三初減再加十與十一乘又七乘九除爲第四初減通計其乘法自四五而遞加亦用相連兩奇數一乘一除而間位加一奇數乘第三層減餘首位五率分子三十二即第二乘法第四層次減數以第二乘法爲實六七乘又一乘三除以第一次減再加八九乘

又三乘五除又五乘爲第二次減再加十與十一乘又五乘七除爲第三次減通計其乘法自六七而遞加亦用相連兩奇數一乘一除而間位加奇數乘第五層減餘首位七率分子七百〇四即第三乘法第六層三減數以七率分子爲實八九乘又一乘三除又五乘爲第一三減再加十與十一乘又三乘五除爲第二三減通計其乘法自八九而遞加亦相連兩奇數一乘一除而間位加奇數乘第七層減餘首位九率分子十六萬四千三百五十二即第四乘法第八層四減數以九率分子爲實十與十一乘又一乘三除爲第一四減計其乘法起十與十一亦相連兩奇數一乘一除而間位奇數乘雖未見已可據前諸減而類推也第九層減餘十一率分子一千三百〇五萬〇八百八十即第五乘法細按數根及諸減數其迭次乘除之例橫竪不紊則自十一率以下可以遞推而其逐率自爲分子與餘弧求切線同故先求用數此切線求餘弧立術之由也

切線求距弧（以本弧與半象限相較如本弧小于半象限爲本弧距中分象限之弧名本距弧如本弧大于半象限爲餘弧距弧）

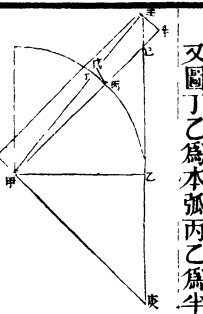
術曰以切線與半徑相加爲一率切線與半徑相減爲二率半徑爲三率求得四率如切線小于半徑爲本距弧切線大于半徑爲餘距弧切線（半徑爲半象限切線不及半徑則本弧必小于半象限過半徑則本弧必大于半象限）于是以半徑爲連比例一率距弧切線爲二率如本弧求切線術入之求得本距弧以減半象限求得餘距弧以加半象限均得本弧

解曰凡本弧切線與半徑相加減之比同于半徑與距弧切線之比也



如圖乙壬爲本弧丙壬爲半象限丙乙爲本距弧丁壬爲本弧切線丙戊爲距弧切線癸壬爲半象限切線即半徑試從癸甲取直角作甲庚線又引癸壬至庚作壬庚半徑成癸甲庚半方形則丁庚爲切線半徑和癸丁爲切線半徑較又從丁與甲庚平行作己丁線又成癸己丁半方形又從丁與己甲平行作丁辛線使與己甲等又成丁辛庚半方形注以丁庚大方斜比癸丁小方斜若丁辛或己甲

大方邊與癸己或己丁小方邊而以己甲大方邊爲大股比己丁小方邊爲大勾又若丙甲半徑小股與丙戊距弧切線小勾夫丁庚與癸丁之比既同于己甲與己丁之比而己甲與己丁之比又同于丙甲與丙戊之比則丁庚與癸丁之比亦必同于丙甲與丙戊之比矣



一率丁庚　己甲　丁庚切線半徑和
二率癸丁　己丁　癸丁切線半徑較
三率己甲　丙甲　丙甲半徑
四率己丁　丙戊　丙戊本距弧切線

又圖丁乙爲本弧丙乙爲半象限丁丙爲餘距弧壬乙爲本弧切線戊丙爲距弧切線己乙爲半象限切線卻半徑試從己甲取直角作甲庚線又引壬乙至庚作乙庚半徑成己甲庚半方形則壬庚爲切線半徑和壬己爲切線半徑較又引甲己至辛復從辛與甲庚平行作壬辛線又成壬辛己半方形又引庚甲至癸復從癸與甲辛平行作癸壬線使與甲辛等又成壬癸庚半方形法以壬庚大方斜比壬己小方斜若壬癸或辛甲大方邊與己辛或壬辛小方邊而以辛甲大方邊爲大股比壬辛小方邊爲大勾又若丙甲半徑小股與戊丙距弧切線小句夫壬庚與壬己之比既同于辛甲與壬辛之比而辛甲與壬辛之比又同于丙甲與戊丙之比則壬庚與壬己之比亦必同于丙甲與戊丙之比矣

一率壬庚　辛甲　壬庚切線半徑和
二率壬己　壬辛　壬己切線半徑較
三率辛甲　丙甲　丙甲半徑
四率壬辛　戊丙　戊丙餘距弧切線

切線求弧背筭式

弦矢求弧背分子大于弧背求弦矢其弦矢與半徑相近者必參用借線求弧之法所以濟連比例術之窮也切線求弧背雖分本弧餘弧二術而四十五度前後各切線究與半徑相近而降位甚難故復有切線求距弧一術正借線求弧之意也茲將九十度分爲四限其自十秒至二十二度三十分則用切線求本弧法求之其自二十二度三十分至四十五度則用切線求本距弧法求之其自四十五度至六十七度三十分則用切線求餘距弧法求之其自六十七度三十分至八十九度五十九分五十秒則用切線求餘弧法求之庶降位均無難矣

切線求餘弧各率乘法表

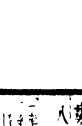
三率	第一乘法	二	
五率	第二乘法	三	
七率	第三乘法	七〇四	
九率	第四乘法	二六四三五	
十一率	第五乘法	一三〇五二八〇	
十三率	第六乘法	一〇九七六五五五〇〇	
十五率	第七乘法	一八五三九八九〇〇〇〇	
十七率	第八乘法	四八一三四八〇〇〇〇〇〇〇	

切線求本弧分子均爲單一無乘法表切線求餘弧第六以後諸乘法尾數無用不全列

凡設切線自十秒至二十二度三十分則用切線求本弧法求之今將設切線四一四二一一三五六二求其本弧算式列於後

法以切線四一四二一三五六二爲第一數正　次以半徑爲一率切線爲二率二率自乘一率除之得一七一五七二八七五爲三率于是置二率以三率乘之一率除之得四率七一〇六七八一二三除之得二三六八九二七一爲第二數負　置四率以三率乘之一率除之得六率一二一九三三〇九五除

之得二四三八六六二爲第三數正　置六率以三率乘之一率除之得八率二〇九二〇四一七除之得二九八八六三爲第四數負　置八率以三率乘之一率除之得十率三五八九三八九除之得三九八八二爲第五數正　置十率以三率乘之一率除之得十二率六一五八四十一除之得五五九八爲第六數負　置十二率以三率乘之一率除之得十四率一〇五六六十三除之得八一三爲第七數正　置十四率以三率乘之一率除之得十六率一八一三十五除之得一二一爲第八數負　置十六率以三率乘之一率除之得十八率三一一十七除之得一八爲第九數正　置十八率以三率乘之一率除之得二十率五三十九除之得〇二爲第十數負　乃并諸正數得四一六六九二九三七以并諸負數得二三九九三八五五減之得三九二六九九〇八二爲弧背檢弧線表爲二十二度三十分也



法以切線二四一四二一三五六爲第一數正　次以切線爲一率半徑爲二率二率自乘一率除之得四一四二一三五六二爲三率二除之三除之得六九〇三五五九三七爲五率用數第一乘法二乘之得一三八〇七一一九七爲第二數正　次以三率自乘二率除之得一七一五七二八七五爲四率于是三除五率用數以四率乘之二率除之得五率四除之五除之得一九七四一〇五八九爲七率用數第二乘法三二乘之得六三一七一四爲第三數負　置七率用數以四率乘之二率除之得七率六除之七除之得八〇六四三五八爲九率用數第三乘法七〇四乘之得五六七七三爲第四數正　五除九率用數以四率乘之二率除之得九率八除之九除之得〇〇三八四三四爲十一率用數第四乘法

一六四三五二乘之得六三一七爲第五數負置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十除之十一除之得〇〇〇〇五九九四七爲十三率用數第五乘法一三〇五〇八八〇乘之得七八二爲第六數正七除十三率用數以四率乘之二率除之得十二率十二除之十三除之得〇〇〇〇〇〇〇〇九四九爲十五率用數第六乘法一〇九七六五九五六〇〇乘之得一〇三爲第七數負置十五率用數以四率乘之二率除之得十五率十四除之十五除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇七六九五爲十七率用數第七乘法一八五三九八九〇〇〇〇〇〇乘之得一四爲第八數正九除十七率用數以四率乘之二率除之得十七率十六除之十七除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇五三九以第八乘法四八一二四八〇〇〇〇〇〇〇〇〇乘之得二爲第九數負乃井諸正數得二五五二八六〇四四以井諸負數六三八一三六減之得二五四六四七九〇八爲以半徑爲二率弧背爲三率之第一率以半徑自乘求得數除之得三九二六九九〇八三即餘弧弧分檢弧線長爲二十二度三十分以減象限得六十七度三十分爲本弧

是術末數爲負故得數稍不足以除半徑冪則所得弧分稍盈又所用三率即餘弧切線若命爲二率以切線求本弧法求之即得餘弧但是術爲餘弧求切線還原之法固不可不備也

凡設切線自二十二度三十分至四十五度則用切線求本距弧法求之茲將設切線四一四二一三五六二求其本距弧算式列於後

法以切線與半徑相加得一四一四二一三五六三爲一率以切線與半徑相減得五八五七八六四八爲二率半徑一〇〇〇〇〇〇〇〇爲三率二率相乘一率除之仍得四一四二一三五六二爲

四率卽本距弧切線命爲連比例第二率以半徑爲一率如切線求本弧術入之依前得本距弧二十二度三十分以減四十五度仍得二十二度三十分爲本弧

凡切線自四十五度至六十七度三十分則用切線求餘距弧法求之茲將設切線二四一四二一三五六求其餘距弧算式列于後

法以切線與半徑相加得三四一四二一三五六爲一率以切線與半徑相減得一四一四二一三五六爲二率半徑一〇〇〇〇〇〇〇〇爲三率二三率相乘一率除之得四一四二一三五六二爲四率卽餘距弧切線命爲連比例第二率以半徑爲一率如切線求本弧術入之依前得餘距弧二十二度三十分以加四十五度得六十七度三十分爲本弧

外切密率卷之三　　譚瑩玉生覆校

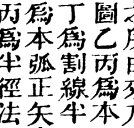
外切密率卷之四

割綫求本弧

術曰先求各率分子爲遞次乘法　置單一兩次一乘得一爲數根復置單一三四遞乘之折半又一除一乘得六爲初減數數根減初減得五爲第一乘法　置前數根兩次二乘得四爲數根復置前數根五六遞乘之折半又一除二乘得三十爲初減數置前初減五六遞乘之折半又二除二乘得九十爲次減數數根減初減得二十六再減次減得六十四爲第二乘法　置前數根兩次三乘得三十六爲數根復置前數根七八遞乘之折半又一除三乘得三百三六爲初減數置前初減七八遞乘之折半又二除三乘得一千二百六十爲次減數置前次減七八遞乘之折半又三除三乘得二千五百二十爲三減數數根減初減得三百再減次減得九百六十再減三減得一千五百六十爲第三乘法　置前數根兩次四乘得五百七十六爲數根復置前數根九十遞乘之折半又一除四乘得六千四百八十爲初減數置前初減九十遞乘之折半又二除四乘得三萬〇二百四十爲次減數置前次減九十遞乘之折半又三除四乘得七萬五千六百爲三減數置前三減九十遞乘之折半又四除四乘得十一萬三千四百爲四減

數數根減初減得五千九百〇四再減次減得二萬四千三百三十六再減三減得五萬一千二百六十四再減四減得六萬二千一百三十六爲第四乘法凡求數根以一二三等數兩次乘之其求各減數先用奇耦二數乘之而折半再用一二三等數挨減數遞加除之遞求得各率分子卽爲遞次乘法乃以割線內減半徑爲割線半徑差倍之爲倍差爲第一數正　次以半徑爲連比例一率倍差爲三率置第一數以三率乘之一率除之得五率三四遞除之爲七率用數第一乘法乘之爲第二數負　置七率用數以三率乘之一率除之得七率五六遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七八遞除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九十遞除之爲十三率用數第四乘法乘之爲第五數正　凡奇數爲正耦數爲負如是遞求至單位下乃併諸正數以併諸負數減之所得爲以半徑爲一率本弧爲二率之三率與半徑相乘平方開之得本弧

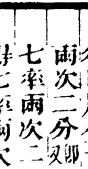
解曰割線求本弧依還原之法當取本弧求割線半徑差率分倍之命爲連比例三率以半徑爲一率依法求得五七九等率復取本弧求割線半徑差率分加減之卽可得割線半徑差求本弧率分惟分子之所由來究不可見是以取割線半徑差倍之爲倍差命爲三率半徑爲一率先求倍矢然後置倍差求倍矢率分命爲三率半徑爲一率依法遞求五七九各率再取倍矢求弧背各率分數以倍差求倍矢率分變易之卽得倍差求本弧各率分數而分子之所由來乃顯然而可見矣



如圖乙丙爲本弧甲丁爲本弧割線乙丁爲割線半徑差庚丁爲倍差戊丙爲本弧正矢辛丙爲倍矢庚壬同甲丙爲半徑法以甲丁割綫大弦比甲丙半徑大股若庚丁倍差小弦與辛丙卽庚壬倍矢小股

一率　大弦　割線一率一又三率二分之一
二率　大股　一率半徑
三率　小弦　三率倍差
四率　小股　倍差求倍矢率分

如圖先以倍差三率乘半徑一率得第一層一率乘三率一爲初商實其割線命爲一率一又三率二分之一爲除法以其首位約初商實得三率一卽爲初商以乘除法得二層一率乘三率一又一率乘五率二分之一以減原實得三層少一率乘五率二分之一爲次商實以除法首位約之得少五率二分之一卽爲次商以乘除法得四層少一率乘五率二分之一少一率乘七率兩次二分之一以減原實得五層一率乘七率兩次二分之一爲三商實以除法首位約之得七率兩次二分之一卽爲三商以乘除法得六層一率乘七率兩次二分之一又一率乘九率三次二分之一以減原實得七層少一率乘九率三次二分之一爲四商實以除法首位約之得少九率三次二分之一卽爲四商以乘除法得八層少一率乘九率三次二分之一少一率乘十一率四次二分之一以爲五商實以除法首位約之得十一率四次二分之一卽爲五商以乘除法得十層一率乘十一率四次二分之一以減原實卻盡通計得倍差求倍矢率分三率一少五率二分之一多七率兩次二分之一少九率三次二分之一多十一率四次二分之一也



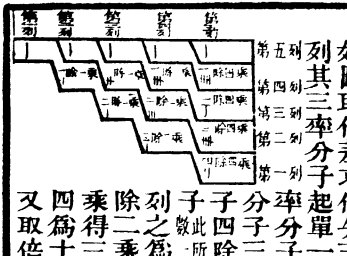
倍差一率二一
倍差九一十
倍差七一二
倍差五一十
倍差三一
倍矢三〇一

倍矢三〇一
倍差三一
倍差五一十
倍差七一二
倍差九一十
倍差一率二一

於是取倍差求倍矢率分卽命爲倍矢三率自乘半徑一率除之得倍差五率一少倍差七率二分之二多倍差九率兩次二分之三少倍差十一率三次二分之四爲倍矢五率以乘倍矢三率半徑一率除之得倍差七率一少倍差九率二分之三多倍差十一率兩次二分之六爲倍矢七率又以倍矢三率乘之一率除之得倍差九率一少倍差十一率二分之四爲倍矢九率又以倍矢九率乘之一率除之得倍差十一率一爲倍矢十一率也

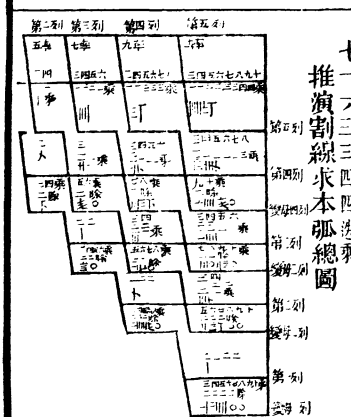
倍矢七〇一
倍差九一十一
倍差七一二
倍差五一十
倍差三一
倍矢三〇一

細審倍差求倍矢各率其分母皆遞加二分其分子適合乎遞加數三率分子均爲一爲遞加數根五率分子爲一二三四等數卽遞加數七率分子爲一二六等數卽二次遞加數九率分子爲一



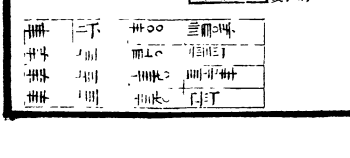
四等數爲三次遞加數則十一率之一亦必爲四次遞加數之第一數凡第四次遞加數之遞求各數係用中間三數之兩數一除一乘加取第一數之二數以之五再加二除六乘得第三數之十其五圖止十一率故遞加之率未顯其三次遞加數之遞求各數則用中間二數之兩數一除一乘中間二數加一其二次遞加數之遞求各數則用中間一數之兩數一除一乘其遞加數則用相連兩數一除一乘其遞加數根則就一數一除一乘雖一數乘除本可省筭而其理則然也

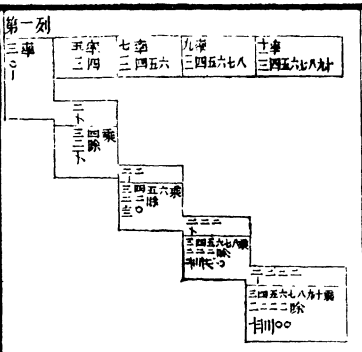
如圖取倍差求倍矢三率各分子斜列之爲第一列其三率分子起單一以一除一乘仍得一爲五分子二除二乘仍得一爲七率分子三除三乘仍得一爲九率分子四除四乘仍得一爲十一率分子此所謂一乘一除一乘也復取倍矢五率斜列之爲第二列其五率起單一一除二乘得二爲七率分子二除三乘得三爲九率分子三除四乘得四爲十一率分子此所謂相連兩數一除一乘又取倍矢七率斜列之爲第三列



其七率分子起單一一除三乘得三爲九率分子二除四乘得六爲十一率分子此所謂中間一數之兩數一除一乘又取倍矢九率斜列之爲第四列其九率分子起單一一除四乘得四爲十一率分子此所謂中間二數之兩數一除一乘又取倍矢十一率補列之爲第五列其十一率亦起單一其全圖逐率乘除之例均秩然而不紊然後取倍矢求弧背率分變易之玆依泰西杜氏演得倍矢求弧背各率分數爲三率一又五率三四分之一乘自乘一又七率三四五六分之四一與二連乘又九率自三至八分之三十六一與三連乘又十一率自三至十分之五百七十六一與三四連乘

推演割線求本弧總圖

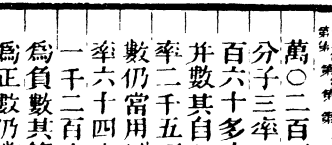




如圖先以倍矢求弧背分母列于上爲定母次視倍矢求弧背率分之三率爲單一乃取倍差求倍矢三率率分爲三率一少五率二分之一多七率兩次二分之一少九率三次二分之一多十一率四次二分之一即命爲倍矢求弧背之三率斜列之爲第一列次視其各率分母使從定母五率之定母係三四分而第一列之五率分母係二分應以三四乘之二除之使從定母七率定母係三四五六分而第一列之七率係兩次二分應以三四五六乘之兩次二除之九率定母係自三至八分第一列之九率係三次二分應以自二至八乘之三次二除之十一率定母係自三至十分第一列之十一率係四次二分應以自三至十乘之四次二除之通計乘除得倍差三率一少五率三四分之六多七率三四五六分之九十少九率自二至八分之二千五百二十多十一率自三至十分之十一萬三千四百爲變母一列

次視倍矢求弧背之五率其分母爲三四其分子爲一自乘乘單一乃取倍差求倍矢五率率分五率一少七率二分之一多九率兩次二分之三少十一率三次二分之四以倍矢求弧背五率三四分之一乘之得倍差五率三四分之一少七率三四分又二分之二多九率三四分又兩次二分之三少十一率三四分又三次二分之四即命爲倍矢求弧背五率斜列之爲第二列應使從定母其五列之分母與定母同其七率定母係三四五六分第二列之七率分母係三四分又二分應以五六乘之二除之其九率定母係自三至八分第二列之九率分母係三四分又兩次二分應以五六七八乘之又兩次二除之其十一率定母係自三至

十分第二列之十一率分母係三四分又三次二分應以自五至十乘之又三次二除之通計乘除得倍差五率三四分之四少七率三四五六分之三十多九率自三至八分之一千二百六十少十一率自三至十分之七萬五千六百爲變母二列次視倍矢求弧背之七率其分母爲三四五六分其分子爲一與一一二二迭乘乃取倍差求倍矢七率率分七率一少九率二分之三多十一率兩次二分之六以倍矢求弧背之七率三四五六分之四少九率三四五六分又二分之十二多十一率三四五六分又兩次二分之二十四命爲倍矢求弧背七率斜列之爲第三列應使從定母其七率之分母與定母同其九率定母係自三至八分第三列之九率分母係三四五六分又二分應以七八乘之二除之其十一率定母係自三至十分第三列之十一率分母係三四五六分又兩次二分之二十四命爲倍矢求弧背十一率斜列之爲第四列應使從定母其十一率定母係自三至十分其第四列之十一率分母係自三至八分又二分應以九十乘之二除之通計乘除得倍差九率自三至八分之三十六少十一率自三至八分之六千四百八十爲變母四列次視倍矢求弧背之十一率其分母爲自三至十分其分子爲一與一一二三三四四迭乘乃取倍差求倍矢十一率率分十一率一以倍矢求弧背十一率自三至十分之五百七十六乘之得倍差十一率自三至十分之五百七十六命爲倍矢求弧背十一率其分母與定母同無須變母



于是各率分子相併其第一層分子三率一又五率一又七率四又九率三十六又十一率五百七十六均爲正數其第二層分子五率六七率三十九率三百三十六十一率六千四百八十均爲負數正負異名應以減爲并計減得分子三率一少五率五少七率二十六少九率三百少十一率五千九百〇四爲第一并數其自五率以下均屬負數其第三層七率九十九率一千二百六十十一率三萬〇二百四十均爲正數仍當以減爲并計減得分子三率一少五率五多七率六十四多九率九百六十多十一率二萬四千二百三十六爲第二并數其自七率以下均爲正數其第四層分子九率二千五百二十一率七萬五千六百均爲負數仍當用減計減得分子三率一少五率四多七率六十四少九率一千五百六十少十一率五萬一千二百六十四爲第三并數其自九率以下均爲負數其第五層十一率分子十一萬三千五百爲正數仍當用減計減得三率一少五率五多七率六十四少九率一千五百六十多十一率六萬二千一百三十六爲第四并數通計求得倍差求本弧各率分數爲三率一少五率三四分之五多七率三四五六分之六十四少九率自三至八分之一千五百六十少十一率自三至十分之六萬二千一百三十六也

細審倍差求本弧率分其分母與倍矢求弧背同是其逐率除法自三四而五六亦與倍矢求弧背同于是審其分子之由來由前圖變爲又圖其逐率首層爲數根而三率分子單一爲諸數之所起其第一數根爲一與一一乘第二數根爲一一二二迭乘是取第一數以二二乘之即第二數根也第三數根爲一與一一二三三迭乘是以第二數根三三乘之即第三數根也第四數根爲一與一一二三三四四迭乘是以第三數根四四乘之即第四數根也復斜視其第一各減數爲遞加數之根而首位即三率分子之一第一初減爲遞加數根之第二位其乘爲三四乘除爲二除是取三率分子之單一

遞加數根首位　用遞加數根第一數求第二數之法一除一乘然後三四乘之二除之即第一初減也第一次減爲遞加數根之第三位爲三四五六乘又兩次二除以較第一初減多五六乘及二除是取第一初減用遞加數根第二數求第三數之法二除二乘然後五六乘之二除之即第一次減也第一三減爲遞加數根之第四位爲自三至八乘又三次二除以較第一次減多七八乘及二除是取第一次減用遞加數根第三數求第四數之法三除三乘然後七八乘之二除之即第一三減也其第一四減爲遞加數根之第五位爲自三至十乘又四次二除以較第一三減多九十乘又二除是取第一三減先用遞加數根第四數求第五數之法五除五乘然後九十乘之二除之即第一四減也復斜視其第二各減數爲遞加數而首位即第一數根第二初減爲遞加數之第二位其乘爲一一乘又五六乘其除爲二除以較第一數根其一一乘同惟多五六乘及二除是取第一數根用遞加數第一數求第二數之法一除二乘又五六乘之二除之即第二初減也其第二次減爲遞加數第三位用一一乘又五六七八乘又兩次二除以較第二初減多七八乘又二除是第二初減用遞加數求第三數之法二除三乘然後七八乘之二除之即第一三減也復斜視其第三各減數爲二次遞加數而首位即第二數根第三初減爲二次遞加數之第二位用一一二二迭乘又七八乘又二除較第二數根其迭乘數同惟多七八乘又二除是以第二數根用二次遞加數求第二數之法一除三乘然後七八乘之又二除之即第三初減也其第三次減爲二次遞加數之第三位亦一一二二迭乘又七八九十乘又兩次二除以較第三初減多九十乘又二除是以第三初減用二次遞加數求第三數之法二除四乘然後九十乘之又二除之即第三次減也其第四初減爲三次遞加數之第二位而首位即第三數根第四初減用一一二二三三迭乘又九十乘二除以較第二數根其迭乘數亦同惟多九十乘及二除是取第三數根用三次遞加數求第二數之法一除四乘然後九十乘之又二除之即第四初減也

復由諸圖變爲後圖第一層數根起單一爲三率

分子加一一乘爲第一數根再加二二乘爲第二數根再加三三乘爲第三數根再加四四乘爲第四數根通計皆用一二三四等數自乘

爲乘法第二層初減數復置單一以一除一乘又三四乘二除爲第一初減置第一數根一除二乘又五六乘二除爲第二初減置第二數根一除三乘又七八乘二除爲第三初減置第三數根一除四乘又九十乘二除爲第四初減通計其乘除則先用一除而乘亦自一而遞加次用三四乘而遞加又通加二除第三層減餘首位五爲五率分子卽第一乘法第四層次減數置第一初減二除二乘又五六乘二除爲第一次減置第二初減二除三乘又七八乘二除爲第二次減置第三初減二除四乘又九十乘二除爲第三次減通計其乘除則先用二除而乘亦起二而遞加次用五六乘而遞加而亦通加二除第五層減餘首位六十四爲七率分子卽第二乘法第六層三減數置第一次減三除三乘又七八乘二除爲第一三減置第二次減三除四乘又九十乘二除爲第二三減通計其乘除則用三除而乘亦起三而遞加次用七八乘而遞加而通加二除第七層減餘首位一千五百六十爲九率分子卽第三乘法第八層四減數置第一三減四除四乘又九十乘二除卽第一四減計其乘除則先用四除而乘亦起四次起九十乘而亦加二除雖圖止十一率而其例可遞推也而第九層減餘首位六萬二千一百三十六爲十一率分子卽第四乘法細按數根及各減數其乘除之例秩然不紊則自十一率以下莫不皆然此割線用倍差求本弧立倘之由也

割綫求餘弧

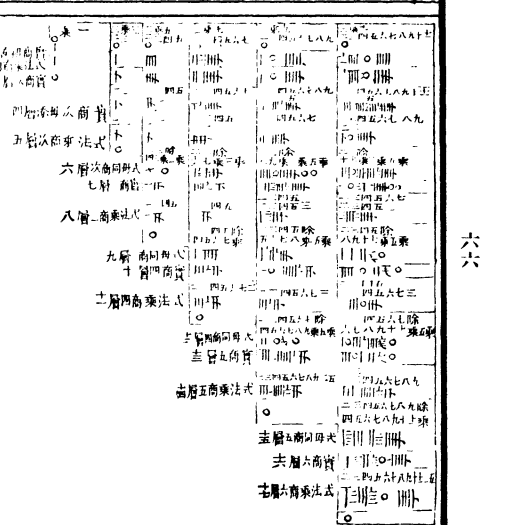
術曰先求各率分子爲遞次乘法　三乘單一以三自乘乘之得二十七爲數根又三乘單一以一自乘乘之又四五遞乘之二三遞除之得十爲初減數數根減初減得十七爲第一乘法　置前數根以五自乘乘之得六百七十五爲數根置前初減以三自乘乘之又六七遞乘之四五遞除之得一百八十九爲初減數置前乘法以一自乘乘之又六七遞乘之二三遞除之得一百十九爲次減數數根減初減得四百八十六再減次減得三百六十七爲第二乘法　五乘前數根以七自乘乘之得十六萬五千三百七十五爲數根五乘前初減以五自乘乘之又八九遞乘之六七遞除之得四萬〇五百爲初減數五乘前次減以三自乘乘之又八九遞乘之四五遞除之得一萬九千二百七十八爲次減數五乘前乘法以一自乘乘之又八九遞乘之二三遞除之得二萬二千〇二十爲三減數數根減初減得十二萬四千八百七十五再減次減得十萬〇五千五百九十七再減三減得八萬三千五百七十七爲第三乘法　置前數根以九自乘乘之得一千三百三十九萬五千三百七十五爲數根置前初減以七自乘乘之又十與十一遞乘之八九遞除之得三百〇三萬一千八百七十五爲初減數置前次減以五自乘乘之又十與十一遞乘之六七遞除之得一百二十六萬二千二百五十爲次減數置前三減以三自乘乘之又十與十一遞乘之四五遞除之得一百〇八萬九千九百九十爲三減數置前乘法以一自乘乘之又十與十一遞乘之二三遞除之得一百五十三萬二千二百四十五爲四減數數根減初減得一千〇三十六萬三千五百再減次減得九百十萬〇一千二百五十再減三減得八百〇一萬一千二百六十再減四減得六百四十七萬九千〇十五爲第四乘法　凡求數根及各減先用各奇數自乘乘之而逐次乘法遞加（如第一乘法起三自乘亦挨次減數遞降如第二乘法起五自乘次減）次用耦奇二數乘而逐次乘法遞加亦用一自乘）次用耦奇二數除而挨次減數遞降又間位加奇數乘如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

乃以餘割爲第一數正　次以餘割爲一率半徑爲二率二率自乘一率除之得三率三率三遞除之爲第二數負　又以三率自乘二率除之得四率于是三除第二數以四率乘之二率除之爲第五率四五遞除之爲七率用數第一乘法乘之爲第三數負　置七率用數四率乘之二率除之爲第七率六七遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第四數負　五

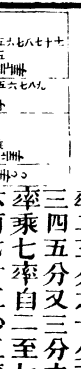
除九率用數四率乘之二率除之爲第九率八九遞除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第五數負置十一率用數四率乘之二率除之爲十一率十與十一遞除之爲十三率用數第四乘法乘之爲第六數負　凡乘除之例同餘弧求割綫如是遞求至單位下乃并諸負數減第一正數所得爲以半徑爲二率餘弧爲三率之第一率以半徑自乘求得數除之得餘弧以減象限得本弧

解曰割綫求餘弧若依切線求本弧還原之法而分子之由來不可見夫餘弧之割綫與半徑與本弧之正弦爲三率連比例則以半徑爲二率自乘爲實正弦求本弧率分各降一率除之其所得亦與用還原法同其一率即爲割線而所得爲以半徑爲二率餘弧爲三率之第一率與切線求餘弧同既由一次除法則分子之由來可見今依泰西杜氏演得降率正弦求本弧率分爲三率一又五率二三分之一又七率二三四五分之九又九率自二至七分之二百二十五又十一率自二至九分之一萬一千〇二十五又十三率自二至十一分之八十九萬三千〇二十五爲割綫求餘弧之除法也

推演割綫求餘弧總圖

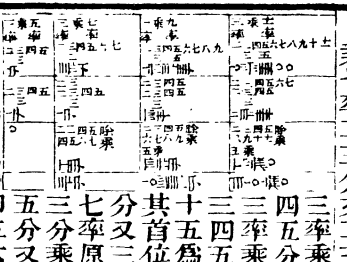


如圖先置二率半徑自乘所得如首層三率乘一率爲初商實以降率正弦求弧背率分除之以除法首位約初商實得一率一即爲初商以乘除法所得如次層三率乘一率一又三率乘一率二分之一又三率乘五率二三四五分之九又三率乘七率自二至七分之二百二十五又三率乘九率自二至九分之一萬一千〇二十五又三率乘十一率自



二二至十一分之八十九萬三千〇二十五爲初商乘法式以減初商實得三層少三率乘二三率二三分之一少三率乘五率二三四五分之九少三率乘七率自一至七分之二百二十五少三率乘九率自一至九分之一萬二十五少三率乘十一率自二至十一千〇二十五少三率乘十一率自二至十分之八十九萬三千〇二十五爲次商實次商以下分子多不受除故次商應添間位奇數分母自三率乘五率以下應加三率自三率乘九率以下再加五乘通計求得如四層少三率乘三率二三分之一少三率乘五率二三四五分又三分之二十七少三率乘七率自二至七分又三分之六百七十五少三率乘九率自二至九分又三分又五分之十六萬五千三百七十五少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一千三百三十九萬五千三百七十五爲添母次商實　置首位一下以除法首位三率一約之得少三率二三分之一即爲次商以乘除法得五層少三率乘三率二三分之一少三率乘五率二三分又二三分之一少三率乘七率二三四五分又二三分之九少三率乘九率自二至七分又二三分之二百二十五少三率乘十一率自二至九分又二三分之一萬一千〇二十五爲次商乘法式應減次商實其少三率乘三率二三分之一減盡其三率乘五率原實分母係二三四五分又三分次商實分母係二三分又二三分應以二三除之又四五乘之又三乘之以同其母其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係二三四五分又二三分應以二三除之六七乘之又三乘之其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係自二至九分又三分應以二三除之八九乘之又三乘五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係自二至九分又三分應以二三除之十一乘之又三乘五乘之通計乘除得如六層少三率乘五率二三四五分又三分之十少三率乘七率自二至七分又三分之一百八十九少三率乘九率自二至九分又三分又五分之四萬〇五百少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之三百〇三萬一千八百七十五爲次商同母式以減次商實

得七層少三率乘五率二三四五分又三分之十七少三率乘七率自二至七分又三分之四百八十六少三率乘九率自二至九分又三分又五分之十二萬四千八百七十五少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一千〇三十六萬三千五百爲三商實



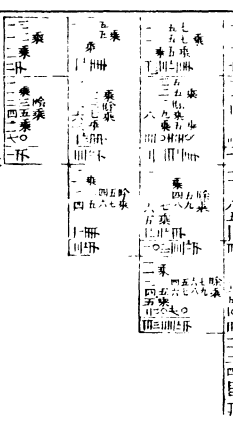
置三商實首位少三率乘五率二三四五分又三分之十七以除法首位約之得少五率二三四五分又三分之十七卽爲三商以乘除法得八層少三率乘七率二三分又二三四五分又三分之十七少三率乘九率二三四五分又三分之十七少三率乘十一率自二至七分又二三四五分又三分之三千八百二十五爲三商乘法式應減三商實其首位少三率乘五率二三四五分又三分之十七減盡其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係二三分又二三四五分又三分之三分應以二三四五除之四五六七乘之以同其母其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係自二至七分又二三四五分又三分之三分應以二三四五除之八九十十一乘之又五乘之通計乘除得如九層少三率乘七率自二至七分又三分之一百十九少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一萬九千二百七十八少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一百二十六萬二千二百五十爲三商同母式以減三商實得十層少三率乘七率自二至七分又三分之三百六十七少三率乘九率自二至九分又三分又五分之十萬〇五千五百九十七少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之九百十萬〇一千二百五十爲四商實

置四商實首位少三率乘七率自二至七分又三分之三百六十七以除法首位約之得少七率自二至七分又三分之三百六十七卽爲四商以乘除法得十一層少三率乘七率自二至七分又三分之三百六十七少三率乘九率二三分又自二至七分又三分之三百六十七少三率乘十一率

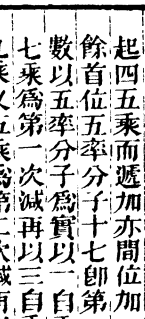
二三四五分又自二至七分又三分之
三千三百〇三爲四商乘法式應
減四商實其首位少三率乘七率
自二至七分又三分之三百六十
七減盡其三率乘九率原實分母
係自二至九分又三分又五分乘
法式係二三分又自二至七分又
三分應以自二至七除之自四至
九乘之又五乘之以同其母其三
率乘十一率原實分母係自二至
十一分又三分又五分乘法式係
二三四五分又自二至七分又三分應以自二至
七除之自六至十一乘之又五乘之通計乘除得
十二層少三率乘九率自二至九分又三分又五
分之二萬二千〇二十少三率乘十一率自二至
十一分又三分又五分之一百〇八萬九千九百
九十爲四商同母式以減四商實得十三層少三
率乘九率自二至九分又三分又五分之八萬三
千五百七十七少三率乘十一率自二至十一分
又三分又五分之八百〇一萬一千二百六十爲
五商實
置五商實首位三率乘九率自二至九分又三分
又五分之八萬三千五百七十七以除法首位約
之得少九率自二至九分又三分又五分之八萬
三千五百七十七卽爲五商以乘除法得十四層
少三率乘九率自二至九分又三
分又五分之八萬三千五百七十
七爲五商乘法式
應減五商實其首位少三率乘九
率自二至九分又三分又五分之
八萬三千五百七十七減盡其三率乘十一率原
實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式
分母係二三分又自二至九分又三分又五分應
以自二至九除之自四至十一乘之以同其母計
乘除得十五層少三率乘十一率自二至十一分
又三分又五分之一百五十三萬二千二百四十
五爲五商同母式以減五商實得十六層少三率
乘十一率自二至十一分又三分又五分之六百
四十七萬九千〇十五爲六商實
置六商實以除法首位約之得少十一率自二至
十一分又三分又五分之六百四十七萬九千〇
十五卽爲六商以乘除法得十七層少三率乘十

一率自二至十一分又三分又五分之
六百四十七萬九千〇十五爲六商乘
法式以減六商實卻盡通計得割綫求
餘弧爲三率之一率其各率分
數爲一率一少三率二三分之一少五
率二三四五分又三分之十七少七率自二
至七分又三分之三百六十七少九率自二
至九分又三分又五分之八萬三千五百七
十七少十一率自二至十一分又三分又五
分之六百四十七萬九千〇十五也
細審割綫求餘弧各率分數其分母與餘弧
求割綫同是其逐率除法亦與餘弧求割綫
同于是審其分子之由來因此次以正弦求
本弧率分爲除法其分子非盡單一當先審
除法分子之由來蓋正弦求本弧分子爲以
各奇數自乘而又逐率疊乘之數起于三率
之單一其五率分子爲兩次一乘單一故仍爲
一其七率分子爲一與一三三疊乘之九其
九率分子爲一與一三三五五疊乘之二百
二十五其十一率分子爲一與一三三五五
七七疊乘之一萬一千〇二十四其十三率分
子爲一與一三三五五七七九九疊乘之八

十四萬三千〇二十五于是由前圖添除法降
位加乘爲第一圈其添母次商實分子爲數根其
五率分子起一一三三疊乘又三乘是以三自乘
乘三乘單一卽第一數根也其七率分子爲一
三三五五疊乘又三乘以較五率分子惟多五五
乘足以第一數根以五自乘乘之卽第二數根也
其九率分子爲一一三三五五七七疊乘又三乘
又五乘以較七率分子惟多七七乘又五乘是置
七率分子以七自乘乘之又五乘之卽第三數根
也其十一率分子爲一一三三五五七七九九疊
乘又三乘
又五乘以
較九率分
子惟多九
九乘是置
九率分子
以九自乘
乘之卽第
四數根也
其初減起
單一五率
初減用一



一乘又二
三除四五
乘又三乘七率初減用一一三三乘又二三除六
七乘又二乘以較五率初減惟多三三乘及六七
乘少四五乘是置五率初減以三自乘乘之又四
五除之六七乘之卽七率初減也九乘初減一一
三三五五疊乘又二三除八九乘又三乘五乘以
較七率初減惟多五五乘及八九乘又五乘少六
七乘是置七率初減又五自乘乘之又六七除之
八九乘之又五乘之卽九率初減也其十一率初
減一一三三五五七七疊乘又二三除十與十一
乘又三乘五乘以較九率初減惟多七七乘及十
與十一乘少八九乘是置九率初減以七自乘乘
之又八九除之十與十一乘之卽十一率初減也
而第一減餘卽爲五率分子其次減數皆根于五
率分子之十七其七率次減一一乘又二三四五
除四五六七乘而四五乘除可相抵是二三除六
七乘也九率次減一一三三乘又二三四五除六
七八九乘又五乘以較七率次減惟多三三乘及
八九乘又五乘少四五乘是置七率次減以三自
乘乘之又四五除之八九乘之又五乘之卽九率
次減也其十一率次減一一三三五五疊乘又二
三四五除八九十與十一乘又五乘以較九率次
減惟多五五乘及十與十一乘少六七乘是置九
率次減以五自乘乘之又六七除之十與十一乘
之卽十一率次減也而第一減餘卽爲七率分子
其三減數皆根于七率分子之三百六十七九率
三減一一乘又自二至七除自四至九乘又五乘
而四五六七乘除可相抵是二三除八九乘也十
一率三減一一三三疊乘又自二至七除自六至
十一乘又五乘以較九率三減惟多三三乘又十
與十一乘少四五乘是置九率三減以三自乘乘
之又四五除之十與十一乘之卽十一率三減也
而第一減餘卽爲九率分子其四減數根于九率
分子之八萬三千五百七十七其十一率四減一
一乘又自二至九除自四至十一乘而四五六七
八九乘除可相抵是二三除十與十一乘也而減
餘六百四十九萬八千〇十五卽爲十一率分子
復由前圖爲第三圖第一層爲添母次商實分子
卽數根置首位單一以自乘乘之又三乘之爲
第一數根再以五自乘乘之爲第二數根再以七
自乘乘之又五乘之爲第三數根再以九自乘乘
之爲第四數根通計其乘法皆用奇數自乘乘之
又間位加一奇數乘而首位單一卽三率分子第



二層初減數以三率分子爲實以一自乘乘之又二三除四五乘又三乘爲第一初減再以三自乘乘之又四五除六七乘爲第二初減再以五自乘乘之又六七除八九乘又五乘爲第三初減再以七自乘乘之又八九除十與十一乘爲第四初減通計其乘除先以各奇數自乘乘之次起二三除而遞加再起四五乘而遞加亦間位加一奇數乘第三層減餘首位五率分子十七卽第一乘法第四層次減數以五率分子爲實以一自乘乘之又二三除六七乘爲第一次減再以三自乘乘之又四五除八九乘又五乘爲第二次減再以五自乘乘之又六七除十與十一乘爲第三次減通計其乘除亦先以各奇數自乘乘之次起二三除而遞加再起六七乘而遞加亦間位加一奇數乘第五層減餘首位七率分子三百六十七卽第二乘法第六層三減數以七率分子爲實以一自乘乘之又二三除八九乘又五乘爲第一三減再以三自乘乘之又四五除十與十一乘爲第二三減通計其乘除亦先以各奇數自乘乘之次起二三除而遞加再起八九乘而遞加亦間位加一奇數乘第七層減餘首位九率分子八萬三千五百七十七卽第三乘法第八層四減數以九率分子爲實以一自乘乘之又二三除十與十一乘爲第一四減計其乘除亦先用奇數自乘乘之次起二三除再起十與十一乘而間位奇數乘法雖未見已可據前諸減而例推也第九層減餘十一率分子六百四十七萬九千〇十五卽第五乘法細按數根及諸減數其迭次乘除之例橫豎不紊則自十一率以下可以遞推而逐率自爲分子與餘弧求割綫同故先求用數此割綫求餘弧立術之由也

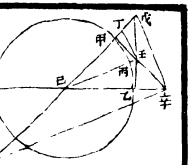
割綫求半弧

術曰先求各率分子爲遞次乘法　置單一以三四遞乘之又一乘三除得四爲初并數初并數又爲末并數并二數得八爲第一乘法　置前初并五六遞乘之又三乘五除得七十二爲初并數置前末并五六遞乘之又一乘三除得四十爲次并數初并數又爲末并數并三數得一百八十四爲第二乘法　置前初并以七八遞乘之又五乘七除得二千八百八十爲初并數置前次并七八遞乘之又三乘五除得一千三百四十四爲次并數置前末并七八遞乘之又一乘三除得一千三百四十四爲三并數初并數又爲末并數并四數得八千四百四十八爲第三乘法　置前初并以九十遞乘之又七乘九除得二十萬〇一千六百爲初并數置前次并以九十遞乘之又五乘七除得八萬六千四百爲次并數置前三并以九十遞乘之又三乘五除得七萬二千五百三十六爲三并數置前末并九十遞乘之又一乘三除得八萬六千四百爲四并數初并數又爲末并數并五數得六十四萬八千五百七十六爲第四乘法　凡求各并數先用奇耦二數乘而逐次乘法遞加（如第一乘第二乘法用三四次用相連兩奇數一乘一除而逐次并用五六乘法如第三乘法初并五乘七除次并三乘五除二并一乘二除）其初并即爲末并乘法降一位則多一并如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

乃以割綫與半徑相加爲一率又相減爲二率半徑爲三率求得四率爲半弧切綫三率（謂以半徑爲遞比例第一率切綫爲二率之三率）爲第一數正　次以半徑爲連比例一率半弧切綫三率爲三率置第一數以三率乘之一率除之得五率三四遞除之爲七率用數以三率乘之一率除之爲第二數負　置七率用數以三率乘之一率除之得七率五六遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七八遞除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九十遞除之爲十一率用數第四乘法乘之爲第五數正　如是遞求至單位下乃并諸正數又并諸負數減之所得爲以半徑爲一率半弧爲二率之三率與一率半徑相乘平方開之得半弧

解曰割綫與半徑相加減之比同于半徑與半弧切綫三率之比也

如圖甲乙爲本弧甲丙爲半弧已戊爲本弧割綫已庚同已甲爲半徑戊甲爲割綫半徑差庚甲爲割綫半徑和甲壬爲半弧切綫甲丁爲半弧切綫三率（此句股形內立中股與小句之三率必爲三率建此圖今丁壬已形以甲已半徑



爲大句以甲壬半弧切線爲中股則甲丁小句必爲半弧切線之半矣庚甲戊辛大句股形與巳甲丁壬小句股形爲同式故以大形之大句庚甲爲割線半徑和比大形之小句甲戊爲割線半徑差若小形之大句巳甲爲半徑與小形之小句甲丁爲半弧切線三率也

一率　大形大句庚甲割線半徑和

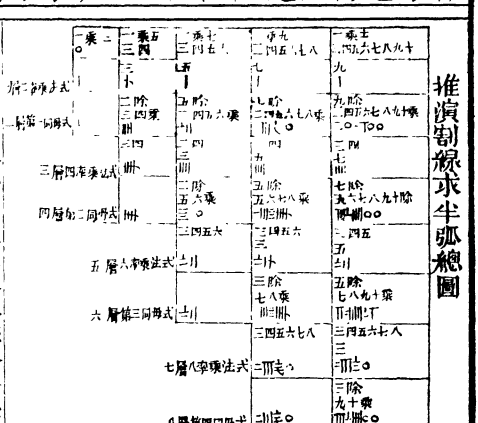
二率　大形小句甲戊割線半徑差

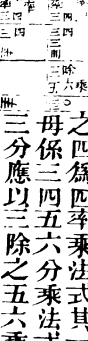
三率　小形大句巳甲半徑

四率　小形小句甲丁半弧切綫三率

有切線二率可求弧背則有切線三率即可求弧背爲二率之二率其法置切線求本弧率分自乘以一率半徑除之即得切線三率求弧背三率率分但用切線求本弧分母則分子奇零必使與割綫求本弧分母相同則分子方無奇零應取切綫求本弧率分其四率以四乘其六率以三四與六乘其八率三四五六與八乘其十率三四五六七八與十乘通計乘得二率一少四率三四分之四多六率三四五六分之七十二少八率自三至八分之二千八百八十多十率自三至十分之二十萬〇一千六百爲添母切線求本弧率分也

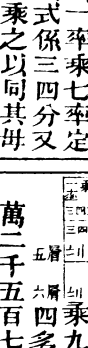
推演割線求半弧總圖


一乘
二乘
三乘
四乘
五乘
六乘
七乘
八乘
九乘
十乘
一
二
三
四
五
六
七
八
九
十
一
二
三
四
五
六
七
八
九
十
一
二
三
四
五
六
七
八
九
十



五率定母係三四分乘法式分母係三分應以三除之三四乘之以同其母其一率乘七率定母係三四五六分乘法式係五分應以五除之三四五六乘之其一率乘九率定母係自三至八分乘法式係七分應以七除之自三至八乘之其一率乘十一率定母係自三至十分乘法式係九分應以九除之自三至十乘之通計乘除得如次層一率乘三率一少一率乘五率三四分之四多一率乘七率三四五六分之千八百八十多一率乘十一率自三至十分之二十萬〇一千六百爲第一同母式

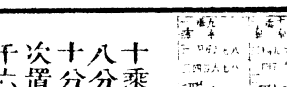
次置原實次位少四率三四分之四偏乘乘法所得如三層少一率乘五率三四分之四多一率乘七率三四分又三分之四少一率乘九率三四分又五分之四多一率乘十一率三四分又七分之四爲四率乘法式其一率乘七率定母係三四五六分乘法式係三四分又三分應以三除之五六乘之以同其母



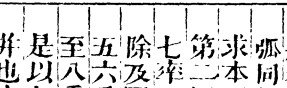
其一率乘九率定母係自三至八分乘法式係三四分又五分應以五除之五六七八乘之其一率乘十一率定母係自三至十分乘法式係三四五六分又七分應以七除之自五至十乘之通計乘除得如四層少一率乘五率三四分之四多一率乘七率三四五六之四少一率乘九率自三至八分之一千三百四十四多一率乘十一率自三至十分之八萬六千四百爲第二同母式

次置原實三位六率三四五六分之七十二偏乘乘法所得如五層一率乘七率三四五六分之七十二少一率乘九率三四五六分又三分之七十二多一率乘十一率三四五六分又五分之七十二爲六率乘法式其一率乘九率定母係自三至八分乘法式係三四五六分又三分應以三除之七八乘之其一率乘十一率定母係自三至十分乘法式係三四五六分又五分應以五除之七八九十乘之通計乘除得如六層一率乘七率三四五六分之七十二少一率乘九率自三至八分之一千三百四十四多一率乘十一率自三至十分之七萬二千五百七十六爲第三同母式

次置原實四位少八率自三至八分之二千八百



八十偏乘乘法所得如七層少一率乘九率自三至八分之二千八百八十多一率乘十一率自三至八分又三分之二千八百八十爲八率乘法式其一率係自三至十分乘法式乘十一率定母係自三至十分乘法式十乘之計乘除得如八層少一率乘九率自三至八分之二千八百八十多一率乘十一率自三至十分之八萬四千六百爲第四同母式次置原實五位十率自三至十分之二十萬〇一千六百乘乘法得九層一率乘十一率自三至十分之二十萬〇一千六百爲十率乘法式即爲第五同母式乃以諸同母式相并得一率乘三率一少一率乘五率三四分之八多一率乘七率三四五六分之一百八十四少一率乘九率自三至八分之八千四百四十八多一率乘十一率自三至十分之六十四萬八千五百七十六爲切線求本弧率分自乘數于是以一率半徑除之得三率一少五率三四分之八多七率三四五六分之一百八十四少九率自三至八分之八千四百十八多十一率自三至十分之六十四萬八千五百七十六爲切線

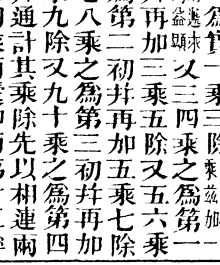


三率求弧背三率之各率分數也

細審切線三率求弧背率分其分母與割綫求本弧同是其各率除法必自三四而五六亦與割線求本弧同矣于是審其分子之由乃由前圖變爲第二圖其初并數起單一五率初并三除三四乘七率初并五除三四五六乘以較五率初并多五除及五六乘少三除是以五六初并三乘五除又五六乘之即七率初并也其九率初并七除自三至八乘以較七率初并多七除及七八乘少五除是以七率初并五乘七除又七八乘之即九率初并也十一率初并九除自三至十乘以較九率初并多九除及九十乘少七除是以九率初并七乘九除又九十乘之即十一率初并也其次并數皆根于五率次并之四亦即五率末并七率次并三除五六乘九率次并五除五六七八乘以較七率次并多五除及七八乘少三除是以七率次并三乘五除又七八乘之即九率次并也十一率次并七除自五至十乘以較九率次并多七除及九

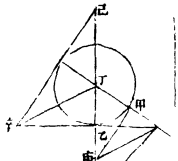
第一次并　第二次并　第二次并　第四次并　第五次并

十乘少五除是以九率次并五乘七除又九十乘之即十一率乘七除又九十乘之即十一率次并也其三并數皆根於七率初并之七十二亦初七率末并九率三并三除七八乘十一率三并五除七八九十乘以較九率三并多五除及九十乘少三除是以九率三并三乘五除又九十乘之即十一率三并也其四并數皆根於九率初并亦即九率末并十一率四并三除九十乘其五并數皆根於十一率初并亦即十一率末并



復由前圖爲第三圖第一層初并數以三率分子單一爲實一乘三除原圖無一乘弦加一乘弦加一乘弦加

割綫求倍弧



術曰割綫自乘冪與二之半徑自乘冪相減爲一率割綫自乘冪爲二率半徑爲三率求得四率如割綫冪小於二之半徑冪所得爲倍本弧割綫如割綫冪大於二之半徑冪所得爲倍餘弧割綫於是以倍弧割綫爲連比例一率半徑爲二率依割綫求餘弧法求得餘弧如係倍本弧割綫則以餘弧減象限如係倍餘弧割綫以餘弧加象限均得倍弧半之即本弧解曰凡半徑與割綫半徑和之比同於割線半徑差與本弧切線三率之比也

如圖甲乙爲本弧丁己爲半徑丁丙爲割線乙丙爲切線乙戊爲本弧切線三率乙庚爲割綫半徑差乙己爲割線半徑和己丁乙辛句股形與戊庚乙丙句股形爲同式故以丁乙大形分句爲半徑比己乙大形大句爲割線半徑和若庚乙小形分句爲割線半徑差與戊乙小形大句爲本弧切線三率也

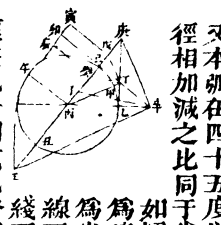
一率　大形分句丁半徑

二率　大形大句己割線半徑和

三率　小形分句庚割線半徑差

四率　小形大句戊本弧切綫三率

又本弧在四十五度以內則本弧切線三率與半徑相加減之比同于半徑與倍本弧割線之比也



如圖甲乙爲本弧己丙爲倍弧己丁爲本弧切線己丙爲半徑丙丑同戊己爲本弧切線三率己癸同庚丙爲倍弧割綫丙壬同庚己爲倍弧割綫半徑差己子同戊己癸丙丁小句股形與庚己子壬辛大句股形爲同式故以癸丙小形兩句較爲切線三率與半徑之和若壬子大形兩句較爲全徑己與庚己同亦與庚壬大形兩句和爲倍弧割之倍夫切線三率與半徑相加減之比既同於全徑與倍弧割綫之比則亦必同於半徑與倍弧割綫之比矣要而論之當以割綫半徑和與割綫半徑差相乘以半徑除之爲切線三率然後與半徑相加減爲一二率今不用半徑除但以割綫半徑和較相乘命爲半徑乘切綫三率如寅卯戊己面積與卯辰己癸同而轉與半徑冪卯午己丙面積相加減爲一二率其比例亦必與切線三率與半徑相加減同半徑千萬爲他倍之比例

即切線冪也（本以半徑除切綫冪爲切綫二率）其與半徑冪相和即割綫冪也其與半徑冪相較即割綫冪減兩段半徑冪也故以割綫冪減二之半徑冪爲一率割綫冪爲二率也

一率　辰癸午丙面積　兩半徑冪內減割綫冪

二率　寅戊午丙面積　割線冪

三率　子壬（即巳）丑之半　半徑

四率　庚壬之半　倍本弧割綫

又本弧在四十五度以外則本弧切綫三率與半徑相加減之比同於半徑與倍餘弧割綫之比也如圖丙甲爲本弧甲乙同丙丑爲餘弧丙寅爲倍餘弧丁丙爲本弧切綫丙戊爲半徑壬丙與庚未並同丙庚爲本弧切線三率辛戊爲倍餘弧割綫戊巳同辛丙爲倍餘弧割綫半徑差申巳與丙癸並同庚壬丙戊丁大句股形與巳癸丙辛子小句股形爲同式故以庚壬大兩句較爲半徑與切綫三率之較比庚戊大兩句總爲切線三率與半徑之和若巳癸小兩句較（即丙申）爲全徑與巳辛小兩句總爲倍餘弧割線之倍夫庚壬與庚戊之比既同於巳癸與巳辛之比則亦同於巳癸之半（即丙申之半）爲倍餘弧割線之比矣而庚壬線與庚戊線之比又同於庚壬未午面積爲割綫冪內減二之半徑冪與庚戊未卯面積爲割綫冪之比則割綫冪內減二之半徑冪與割綫冪其比例亦必同於巳癸之半（即丙戊）與巳辛之半矣

一率　庚壬未午面積　割綫冪內減兩半徑冪

二率　庚戊未卯面積　割綫冪

三率　巳癸之半（即丙戊）　半徑

四率　巳辛之半　倍餘弧割綫

割線求弧背算式

割線求弧背雖分本弧餘弧二術而降位仍屬不易與切線求弧背同故復有求半弧求倍弧術亦借線求弧之意也茲將九十度分爲五限其自十秒至十五度則用割線求本弧之法求之其自十五度至三十度則用割綫求半弧法之其自三十度至四十五度則用割綫求倍本弧法求之其自四十五度至六十度則用割綫求倍餘弧法求之其自六十度至八十九度五十九分五十秒則用割線求餘弧法求之庶降位均無難矣

割線求本弧各率乘法表

五率　第一乘法　五
七率　第二乘法　六四
九率　第三乘法　一五六〇
十一率　第四乘法　六二一三六
十三率　第五乘法　三六八〇二八〇
十五率　第六乘法　三〇四〇〇〇〇〇

割綫求餘弧各率乘法表

五率　第一乘法　一七
七率　第二乘法　二六七
九率　第三乘法　八三五七七
十一率　第四乘法　六四七九〇一五
十三率　第五乘法　五三二九二四二八〇〇
十五率　第六乘法　八八一九六〇〇〇〇〇
十七率　第七乘法　一七五八〇八〇〇〇〇〇〇〇
十九率　第八乘法　五〇六九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

割線求半弧各率乘法表

五率　第一乘法　八
七率　第二乘法　一八四
九率　第三乘法　八四四八
十一率　第四乘法　六四八五七六
十三率　第五乘法　七四九七二六〇
十五率　第六乘法　一二七四六六〇〇〇
十七率　第七乘法　二六四三八五六六〇〇〇〇

乘法表中尾數不全列

凡設割綫自十秒至十五度則用割線求本弧

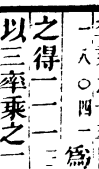
法求之今將設割線一〇三五二七六一八〇四求其本弧算式列於後

法以割線內減半徑得三五二七六一八〇四爲割線半徑差倍之得七〇五五二三六〇八爲第一數正　次以半徑爲一率倍差爲三率置第一數以三率乘之一率除之得五率三除之四除之得四一四八〇二九六八爲七率用數第一乘法五乘之得二〇七四〇一四八爲第二數負　置七率用數以三率乘之一率除之得七率五除之六除之得九七五五一〇九六爲九率用數第二乘法六四乘之得六二四二二七爲第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七除之八除之得〇一二二九〇一爲十一率用數第三乘法一五六〇乘之得一九一七二爲第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九除之十除之得〇〇〇〇九六二四爲十三率用數第四乘法六二一三六乘之得五九九爲第五數正　置十三率用數以三率乘之一率除之得十三率十一除之十二除之得〇〇〇〇〇〇〇五一四五爲十五率用數第五乘法三六八〇二八〇乘之得〇一九爲第六數負　置十五率用數以三率乘之一率除之得十五率十三除之十四除之得〇〇〇〇〇〇〇〇一九九以第六乘法三〇四〇〇〇〇〇乘之得〇〇一爲第七數正　乃并諸正數得七〇六一四八五三五以并諸負數二〇七五九二四〇減之得六八五三八九一九五爲以半徑爲一率本弧爲二率之第三率與半徑相乘平方開之得二六一七九九三八八爲本弧弧分檢弧綫表得十五度也

凡設割綫自六十度至八十九度五十九分五十秒則用割線求餘弧法求之今將設割線二〇〇〇〇〇〇〇〇求其餘弧算式列於後

法以割綫二〇〇〇〇〇〇〇〇爲第一數正　次

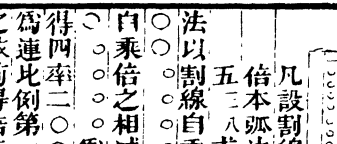
以割綫爲一率半徑爲二率二率自乘一率除之得五〇〇〇〇〇〇。爲三率二除之三除之得八三三三三三三三爲第二數負　又以三率自乘二率除之得二五〇〇〇〇〇〇。爲四率於是三除第二數以四率乘之二率除之得五率四除之五除之得四七二二二二二爲七率用數第一乘法一七乘之得五九〇二七八爲第三數負　置七率用數以四率乘之二率除之得七率六除之七除之得二〇六六七九八九爲九率用數第二乘法三六七乘之得七五八五二爲第四數負　五除九率用數以四率乘之二率除之得九率八除之九除之得。一四三五二七七爲十一率用數第三乘法八三五七七乘之得一九九六爲第五數負　置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十除之十一除之得。〇〇〇〇三二六一九九爲十三率用數第四乘法六四七九〇一五乘之得二一一三爲第六數負　七除十三率用數以四率乘之二率除之得十三率十二除之十三除之得。〇〇〇〇〇〇〇七四七九爲十五率用數第五乘法五三二九二四二八〇〇乘之得三九八爲第七數負　置十五率用數以四率乘之二率除之得十五率十四除之十五除之得。〇〇〇〇〇〇〇八九九爲十七率用數第六乘法八一九六〇〇〇〇〇〇乘之得七八爲第八數　九除十七率用數以四率乘之二率除之得十七率十六除之十七除之得。〇〇〇〇〇〇〇〇〇九一爲十九率用數第七乘法一七五八〇八〇〇〇〇〇〇〇〇乘之得一七爲第九數　置十九率用數以四率乘之二率除之得十九率十八除之十九除之得。〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇六六以第八乘法五〇六九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇乘之得三爲第十數負　乃并諸負數得九〇一四〇六八以減第一正數得一九〇九八五九三二爲以半徑爲二率餘弧爲三率之第一率以半徑自乘求得數除之得五二三五九八七七六爲餘弧弧分檢弧線表爲三十度以減象限得六十度即木



凡設割綫自十五度至三十度則用割綫求半弧法求之今將設割綫一[五四七〇〇五三八]求其半弧算式列於後

法以割綫加半徑得二一五四七〇〇五三八爲割綫半徑和爲一率又減半徑得一五四七〇〇五三八爲二率半徑爲三率求得四率七一七九六七九六爲半弧切線三率爲第一數正　次以半徑爲連比例一率半弧切線三率爲三率置第一數以三率乘之一率除之得五率三除之四除之得四二九五八四六七七爲七率用數第一乘法八乘之得三四三六五一七四爲第二數負　置七率用數以三率乘之一率除之得七率五除之六除之得一〇二八〇四五二爲九率用數第二乘法一八四乘之得一八九一六〇三爲第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七除之八除之得〇一三一八〇四一爲十一率用數第三乘法八四四八乘之得一一二四八爲第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九除之十除之得〇〇〇〇一〇五一四六爲十三率用數第四乘法

六四八五七六乘之得六八一九爲第五數正　置十三率用數以三率乘之一率除之得十三率十一除之十二除之得〇〇〇〇〇〇五七一九爲十五率用數第五乘法七四九七二一六〇乘之得四二八爲第六數負　置十五率用數以三率乘之一率除之得十五率十三除之十四除之得〇〇〇〇〇〇二二五六爲十七率用數第六乘法一二一七四六六〇〇〇乘之得〇二七爲第七數正　置十七率用數以三率乘之一乘除之得十七率十五除之十六除之得〇〇〇〇〇〇六七五　第七乘法二六四三八五六六〇〇〇〇乘之得〇一爲第八數負　乃并諸正數得七一九八六六一四五以并諸負數三四四七六九五一減之得六八五三八九一九四爲以半徑爲一率半弧爲二率之三率與半徑相乘平方開之得二六一七九九三八八爲半弧弧分檢弧線表得十五度倍之得三十度即本弧



凡設割線自三十度至四十五度則用割線求倍本弧法求之今將設割線一一五四七〇〇五二八求其倍本弧算式列於後

法以割線自乘得一三三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇截用十位準數下推以存其位數爲割線羃以半徑自乘倍之相減得六六六六六六六六七〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率割綫羃爲二率半徑爲三率求得四率二〇〇〇〇〇〇〇〇爲倍本弧割線命爲連比例第一率半徑爲二率如割線求餘弧術入之依前得倍本弧之餘弧三十度以減象限得倍本弧六十度半之得三十度卽本弧

凡設割線自四十五度至六十度則用割綫求倍餘弧法求之今將設割綫二〇〇〇〇〇〇〇〇求其倍餘弧算式列於後

法以割綫自乘得四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

王雲五主編

叢書集成初編

外切密率

中華民國二十五年十二月初版

撰者 戴煦

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

D六一〇三